

公共投資の経済効果を計測するマクロ経済モデルの
構築に関する調査研究

2019年1月

国土交通省 国土交通政策研究所
前政策分析官 長町 大輔
研究官 小谷 将之

要旨

我が国においては、喫緊の課題である「経済再生」に最大限貢献できるよう、財政健全化との両立の必要性を十分認識しながら、経済効果の高いインフラ整備に取り組む必要がある。こうした取り組みを進めていく上では、個々のインフラ整備事業の整備効果のみならず、その時々を経済情勢を考慮した上でマクロレベルでの経済効果を定量的に把握することが必要であり、そのためには、近年のマクロ経済学研究を基礎とした分析手法に即したアプローチが重要となる。

本研究では、このような問題意識に基づき、インフラ整備によるマクロ経済効果を把握するためのマクロ経済モデルの構築を試みた。具体的には、家計や企業が将来を合理的に予想して行動するという仮定に基づく動学的確率的一般均衡 (DSGE) としてのニューケインジアンモデル (以下 DSGE モデル) の構築を行った。

その際、実際のデータから得られる結果とモデルが示す結果が矛盾する「財政政策パズル」に留意する必要がある。これは、インフラ整備を含む政府支出の効果に関して、VAR (ベクトル自己回帰) などの時系列分析によると家計消費を増加させる (クラウドイン) 効果が確認される一方、将来の増税予想によって政策効果が相殺されるというリカードの等価定理を前提とする DSGE モデルでは、逆に家計消費をクラウドイングアウトさせてしまうという矛盾が生じることである。本研究では、DSGE モデルの構築に先立って、DSGE モデルにおける財政政策パズルおよびその問題の解決策に関する先行研究のレビューを行い (第 1 章)、わが国マクロ経済データを用いた VAR モデルによって、財政政策の家計消費のクラウドインの確認を行った (第 2 章)。

その上で、家計の異時点間の最適化行動、独占的競争モデル・硬直価格モデルによるインフレ率の内生化、テイラールールなどによる金融政策の内生化といった要素を備えた標準的なニューケインジアン型 DSGE モデルを構築した。続いて社会資本の生産力効果を考慮する観点から、標準的 DSGE モデルの企業の生産関数に、生産要素としての社会資本を導入したモデルを構築し、これを本研究のベースラインモデルとした。このベースラインモデルを基礎として、先行研究で提案されている財政政策パズルの複数の解決策のうち、異時点間の消費の最適化を行わない家計 (Non-Ricardian households) が存在するモデル、並びに消費と労働が非分離型の効用関数 (Non-separable preferences over consumption and leisure) および消費の習慣形成 (Deep habits) を導入したモデルの 2 つの拡張型 DSGE モデルの構築を試みた (第 3 章)。

本研究における成果は上記のとおりであるが、最終目的である「インフラ整備によるマクロ経済効果を把握するためのマクロ経済モデルの構築」の達成にあたっては、構築したモデルのパラメータを実際のデータを用いて推定し、財政政策の乗数推計までを行う必要がある。本研究ではそこまでの実現には至らず、今後の課題として残すこととなった。財政政策の意思決定など政策判断に活かせる情報を提供できるだけの DSGE モデル開発に関する研究はようやく緒に就いた段階であり、本研究が今後の DSGE 研究の発展の一助となることを期待するものである。

Abstract

Economic revitalization has been a prioritized issue for a couple of years in Japan. In this circumstance, public investments are expected to generate positive effects on the economy as much as possible along with due consideration to achieving fiscal soundness. Endeavors to implement effective public investment should include not only quantitative evaluation of economic impacts from each investment individually, but also identifying long-term aggregated effects on entire economy. In order to achieve the goals, analytical approach applying latest macroeconomic studies must be important.

In this study, we develop macroeconomic models to evaluate impacts of public investment. More specifically, the models are sorts of New Keynesian Model as a Dynamic Stochastic General Equilibrium (DSGE), in which an assumption that households and firms behave as economically rational for future is valid.

In the context of DSGE studies, a presence of contradictive phenomenon between empirical evidence and theoretical prediction using the model, known as ‘fiscal policy puzzle’ has been pointed out by a number of previous studies. While clouding-out of household consumption occurs in DSGE model which embeds the Ricardian Equivalence principle of households’ expectation about future tax burden increase, several empirical studies have confirmed that household consumption responses increasingly to governmental expenditure which includes public investment, using time series analyses such as Vector Auto Regressive (VAR). Prior to developing DSGE model, therefore, we review previous literatures on fiscal policy puzzle and model modifications proposed to solve the puzzle in Chapter 1. Chapter 2 presents some empirical evidences of clouding-in effect of household consumption into fiscal policy using VAR models with up-dated macroeconomic data.

In Section 3.1, we develop a standard DSGE model which contains New Keynesian features such as rational households’ consumption, endogenous inflation rates by introducing monopolistic competition and price stickiness, and Taylor-rule-based financial policy. In Section 3.2, we expand the standard DSGE to take public capital into consideration as a factor of production. We set the DSGE which contains standard NK characteristics with productivity of public capital as a “baseline” model in our study. In Section 3.3 and 3.4, we attempt to expand our baseline DSGE model into two ways to address fiscal policy puzzle; one is introducing certain proportion of Non-Ricardian households who consume their income each period; and the another is introducing Non-separable preferences over consumption and leisure, and inertia of households’ consumption, known as ‘Deep habits’. Chapter 4 concludes the study and make some discussion for future research.

In order to achieve the goal, say, evaluation of public investment using the model, there are lots of tasks left behind. These include estimation of structural parameters with real data, simulation of fiscal policy shock, and calculation of multiplier. These are leftover for future study. However, we believe the results would contribute a part of the progress of DSGE development, even if our study is just a first step to make the model informative enough for fiscal policy decision-making.

目次

1 章 問題意識ならびに先行研究	1
1.1. 概要	1
1.2. 財政政策パズルおよび政府支出乗数に関する先行研究	1
1.2.1. マクロ経済モデルと DSGE モデル	1
1.2.2. 財政政策パズル	2
2 章 VAR モデルによる乗数効果の推計	16
2.1. VAR の概要	16
2.1.1. VAR モデルとは	16
2.2. 財政政策の経済効果に関する VAR モデル	17
2.2.1. 誘導形 VAR	18
2.2.2. 構造 VAR	19
2.3. コレスキー識別（再帰的識別）	20
2.4. 符号制約（Sign Restriction）	21
2.5. 長期制約（Blanchard and Quah(1993)）	23
2.6. より一般的な識別制約（Rubio-Ramirez et al.(2010)）	24
2.7. VAR による公共投資の乗数効果測定	27
2.7.1. コレスキー分解を用いた識別制約と財政乗数	27
2.7.2. Rubio-Ramirez et al. (2010) の方法を用いた識別制約と財政乗数	29
3 章 DSGE モデルの構築	31
3.1. 標準的なモデル	31
3.2. 生産関数への社会資本の導入	38
3.3. 非リカーディアン家計(異時点間の最適化を行わない家計)の導入	45
リカーディアン家計	45
非リカーディアン家計	46
3.4. 非分離型効用関数の導入	51
3.5. Deep habits の導入	52
3.6. 本調査研究で構築した DSGE モデルにおける主要な設定の組み合わせ	63
4 章 まとめと課題	64
補論 A 財政支出乗数	65
補論 B 名目金利が常にゼロ近傍（zero interest rate lower bound）にある場合の政府支出に対する家計消費のクラウドインについて（Christiano et al. (2011)）	67
<有識者へのヒアリング概要>	74
<参考文献>	74

1章 問題意識ならびに先行研究

1.1. 概要

我が国においては、喫緊の課題である「経済再生」に最大限貢献できるよう、財政健全化との両立の必要性を十分認識しながら、経済効果の高いインフラ整備に取り組む必要がある。こうした取組みを進めていく上では、個々のインフラ整備事業の整備効果のみならず、その時々々の経済情勢を考慮した上でマクロレベルでの経済効果を定量的に把握することが必要であり、そのためには、近年のマクロ経済学研究を基礎とした分析手法に即したアプローチが重要となる。

本研究では、このような問題意識に基づき、インフラ整備によるマクロ経済効果を把握するためのマクロ経済モデルの構築を試みた。具体的には、家計や企業が将来を合理的に予想して行動するという仮定に基づく動学的確率的一般均衡 (Dynamic Stochastic General Equilibrium; 以下 DSGE) としてのニューケインジアンモデル¹ (以下 DSGE モデル) の構築を試みた。

1.2. 財政政策パズルおよび政府支出乗数に関する先行研究

1.2.1. マクロ経済モデルと DSGE モデル

マクロ経済の数量的分析を行うという動きは、1970年代に始まった。しかしながら、「従来型のいわゆるマクロ計量モデルは、人々の将来予想を考慮したマイクロ経済学的基礎に基づいて構造パラメータの値が推定されていないため、経済政策の実施によって値が変化する可能性がある。したがって、これらを不変のものとして扱う従来型のマクロ計量モデルでは政策分析を行うことは適切ではない」という批判(いわゆるルーカス批判)がなされた(Lucas(1976))。以降、家計や企業など経済主体の異時点間を考慮した効用・利潤最大化行動(動学的最適化)が明示的に反映されるようなミクロ的な基礎をもつマクロ経済モデルの開発が目指されるようになった。マイクロ経済学的な基礎をもつモデルのパラメータは、人々の効用関数や企業の生産関数といった経済のより深いところに関係するものであり、政策の影響からは独立であるという前提から「ディーブパラメータ」と呼ばれる(江口(2011))。

こうした動向を踏まえてマクロ経済モデルの主流になってきたのが DSGE モデルである。DSGE モデルは、将来の経済状態を考慮しながら家計や企業が最適な行動を選択し、各時点で市場取引が成立するモデルで、技術ショックや政策ショックなどの確率的に生じるような外生ショックの要素を含む。DSGE モデルは、完全競争・完全情報の下での経済活動を前提とした RBC モデル(Real Business Cycle Model)を基礎としているため、短期の経済動学を分析するにあたっては、RBC モデルの上にさまざまな市場の「摩擦」の考慮を加えていくことになる。加藤(2007)の表現を拝借すれば、「ピザの生地」にあたる RBC モデルに、「ピザの具」となる様々な経済的な摩擦を、研究目的(本研究であれば財政政策の経済効果の分析)にあわせて RBC モデルに加えていくことで、求める DSGE モデルを構築していく。

¹ ニューケインジアンモデルは、「企業や家計の将来予想(期待)はあらゆる経済活動に影響するため、政策の効果を予測するためには人々の期待形成を理解することが決定的に重要であるが、伝統的なケインズ経済学ではこの期待を適切に考慮できない」としたルーカス批判(次節参照)を克服するために、合理的期待形成などのミクロ的基礎付けをより強固にしたモデルと言える(齊藤他(2010)第17章等を参照)。

1.2.2. 財政政策パズル

標準的な DSGE モデルで財政政策の効果を分析する際に生じるひとつの特徴として、DSGE モデルが想定する経済環境が、リカードの等価定理²（あるいは中立命題）が成立している新古典派的な状況下であるため、政府支出を増やすと、負の資産効果(将来における増税の予想)によって、消費が（ほぼ自動的に）マイナスに反応することが挙げられる(例えば江口(2012))。一方で、VAR³ モデル等を用いた多くの実証分析においては、政府支出の増大に対して消費は正の反応を示している。つまり、標準的な DSGE モデルを用いて財政政策の分析を行おうとすると、理論的帰結とデータによる実証結果との乖離が生じてしまうことが指摘されており、これを「財政政策パズル (fiscal policy puzzle⁴)」と呼ぶ。

この問題に対して、いくつかの先行研究において解決策の提案がなされている。Iwata(2013)では、政府支出の拡大によって個人消費にプラスの影響を与える状況を DSGE で再現するために考えられる手段として、①非リカーディアン家計(Non-Ricardian households)の考慮、②消費と余暇にかかる非分離型選好(Non-separable preferences over consumption and leisure)、③消費の習慣形成(Deep habits)、④政府債務に反応した支出減(Spending reversals)、⑤公共財の生産力効果(Productive public capital)、⑥民間消費と政府支出のエッジワース補完性(Edgeworth complementarity between private consumption and government spending)の6つが挙げられている。また、Christiano et al. (2011)等においては、名目金利がゼロ近傍において固定される(zero interest rate lower bound)ケースについても言及されている。

本研究では、3.1 節で標準的な DSGE モデルの構築を行った後、3.2 節において企業の生産関数に生産要素としての社会資本の導入(上記⑤に該当)を行った。これをベースラインモデルとし、3.3 節においてベースラインモデルに非リカーディアン家計(上記①に該当)を考慮したモデルを構築した。また、3.4 節ではベースラインモデルの効用関数を消費と余暇にかかる非分離型選好(上記②に該当)に修正し、3.5 節で3.4 節のモデルに消費の習慣形成(上記③に該当)を組み込んだ⁵。すなわち社会資本を生産要素に加えた標準的 DSGE モデルに(1)非リカーディアン家計を考慮したモデル、および(2)非分離型効用関数かつ消費の習慣形成を考慮したモデルの2つの DSGE モデルの開発を行った。

本節では、DSGE モデルの構築に先立ち、財政政策パズルの解決策に関して、主要論文をもとにしたレビューを行う⁶。

² 現在の財政政策による政府支出が、将来の増税によって補填されることが予想される場合、家計が将来の増税を見越して現在の消費を抑制することになり、結果として実質的には消費や所得に何らの影響も与えない、とする考え方。

³ ベクトル自己回帰(vector autoregressive)の略。時系列分析を多変量に拡張したもの。第2章を参照。

⁴ Iwata(2013)では財政政策による反応に関して理論が説明する現象と実証分析の結果が矛盾する財政政策パズルについて□家計消費に関するものと、□実質為替レートに関するものの2つを挙げている。同論文が後者に焦点を当てた研究である一方、本研究における財政政策パズルは前者のみを指す。

⁵ 家計の効用関数の拡張として(1)非リカーディアン家計の存在と、(2)非分離型効用関数+消費の習慣形成の2つに分けた理由は、モデルがいたずらに煩雑になるのを避けたためである。なお、先行研究サーベイ中の④ Spending reversals については、有識者を含めた事前検討の段階で、データとの整合性の観点から、財政政策パズルの解決に資することが難しいと判断されたほか、⑥Edgeworth complementary については、政府消費が家計消費を誘発することを述べたものであり、政府投資と家計消費の関係を議論しているものではないことから、モデル化の対象から外した。

⁶ 本稿でレビューする既存研究のモデルの説明については概要及び主要な結果のみを報告する。記号や略字等は原則原論文に即しているため、詳細は原論文を参照。

① Productive public capital (生産関数への(生産力効果のある)社会資本の導入)

(Linnemann and Shabert(2006); Leeper et al.(2010))

Linnemann and Shabert (2006)は、ニューケインジアンモデルにおける生産関数に、生産要素として民間資本・労働・全要素生産性に加えて社会資本を導入することで、政府支出の家計消費などへの影響を考察した。具体的には、政府支出の後、社会資本ストックの効果が発現するまでの一定期間のラグ (いわゆる **time-to-build lag**) の経過後、社会資本が経済 (生産) にプラスの生産力効果を及ぼすという流れをモデルの中に取り込んだものである。このモデルにおいては、社会資本の生産性が大きいほど、政府支出の増加に対する消費のクラウドインの効果が高くなり、**time-to-build lag** が大きいほど効果が低下すると考えられる。

また Leeper et al. (2010) では、2007 年のサブプライムローン問題を発端とした金融危機に起因する景気後退に対処するために米国政府が実施した大規模な財政支出の効果を、拡張された新古典派モデルで検証している。米国政府が実施した財政政策の 1 つである 2009 年アメリカ復興・再投資法 (ARRA: American Recovery and Reinvestment Act of 2009) は、予算が総額約 7900 億ドルという大規模なものであり、その中には住宅・交通・水道などのインフラ整備への支出も含まれていた。このような大規模な財政支出は、景気後退を軽減する政策として一見有効に機能すると考えられる。短期的には、民間需要の下落を政府部門が財・サービスを購入することで相殺し、長期的には、公共投資によって形成された社会資本が経済成長を促進することが期待される。

しかし Leeper et al. (2010)は、政府投資が経済に与える影響についての上記の観点では、2 つの重要な点を見逃しているとして指摘し、モデルの拡張を試みた。1 つは、上述した社会資本形成の実現ラグ(**time-to-build lag**) である。標準的な新古典派モデルでは、社会資本の形成は一時点の間に即座に行われると想定するが、実際には予算の承認から事業計画の策定・入札・建設・評価と、社会資本の形成までにいくつものプロセスが存在し、その効果が発現するまでには一定のタイムラグが存在する。この社会資本形成の実現ラグを明示的にモデルに取り入れることが 1 つ目の拡張である。

2 つ目の拡張は将来の財政調整(**future fiscal financing adjustment**) である。現在の大規模な財政支出は、将来の財政の持続可能性に関して、政府の判断に影響を与える。つまり、現在の大規模な財政赤字は、国債のデフォルトが許されない限り、将来の各種の増税や政府支出の減少を引き起こす。この予測される将来の財政調整をモデルに取り込むことが 2 点目の拡張である。

Leeper et al. (2010) で用いられている生産関数は以下のとおりである：

$$y_t = u_t^\alpha (v_t k_{t-1})^\alpha (l_t)^{1-\alpha} (K_{t-1}^G)^{\alpha^G} \quad (1-1)$$

ここで、 u_t^α は AR(1) 過程⁷に従う生産性ショックである。また、 y_t は企業の生産物、 v_t は資本利

⁷ 一階の自己回帰 (autoregressive) 過程を意味し、当期の値が 1 期前の自己の値と相関をもつ (影響をうける) 状況を表現する。

用率、 k, l, α はそれぞれ資本ストック、労働投入量、資本分配率である。 K_{t-1}^G が集計された社会資本(aggregated public capital)であり、政府部門の投資によって形成される。また、 α^G は生産の社会資本に対する弾性値を表す。この α^G は社会資本の生産性でもあり、モデル上において財政支出の波及効果について最も大きな影響を持つパラメータである。

Leeper et al. (2010)では、この α^G が現実のデータから直接観測できず、またいくつかの先行研究では、推計されたパラメータの符号についての結論が分かれており⁸、未だコンセンサスが存在しないとした上で、Baxter and King (1993) に従い、 $\alpha^G = 0.05$ をベースラインのモデルとして乗数の計算を行っている。

また、社会資本 (K_t^G) は以下の運動方程式 (law of motion) に従って変動する：

$$K_{t-1}^G = (1 - \delta_G)K_{t-2}^G + A_{t-N} \quad (1-2)$$

ここで、 δ_G は社会資本の減価償却率、 N は社会資本が完成して生産投入財として利用できるまでにかかる期間(実施ラグ=implementation lag)、 A_{t-N} は N 期のラグを伴って形成された社会資本投資である。 N の単位は四半期であり、 $N = 4$ で1年を意味する。例えば $N = 4$ とすると、

$$K_3^G = (1 - \delta_G)K_2^G + A_0 \quad (1-3)$$

となり、 $t = 4$ から生産量に影響する。

社会資本が各期にいくら配分されるかは以下のAR(1)過程に従うと仮定している：

$$\ln A_t = \rho_A \ln A_{t-1} + \sigma_A \epsilon_t^A \quad (1-4)$$

ここで、 ϵ_t^A は平均ゼロ、分散1の正規分布 ($N(0,1)$) に従うショック項である。 ρ_A は財政ショックの持続性に関するパラメータである。これは、米国のデータより推計されており、モデル上では0.94と設定されている。

同論文では、現在価値ベースに割り引いた現在価値乗数：

$$\text{Present value cumulative multiplier} = \frac{\sum_{i=0}^k (\prod_{j=0}^i r_{t+j}^{-1}) \Delta Y_{t+i}}{\sum_{i=0}^k (\prod_{j=0}^i r_{t+j}^{-1}) \Delta G_{t+i}} \quad (1-5)$$

で乗数効果を測っている。 ϵ_t^A ショックの乗数効果は表 1-1 によれば、社会資本の生産性(α^G)が高いほど生産量、消費、投資に対する乗数効果が高くなることと、実施ラグ(N)が長くなるほど乗数効果が低下する。

⁸ 同論文で紹介されているだけでも、社会資本の生産性パラメータの符号が負(Evans and Karras(1994))、0(Holtz-Eakin and Schwartz (1995))、正(Nadiri and Mamuneas (1994))と推計されている。

表 1-1 政府投資の増加に対する累積乗数の現在価値（平均および 90%信頼区間）

	Y	C	I	Y	C	I
	$\alpha^G = 0.05$			$\alpha^G = 0.1$		
1Q delay	0.39 (0.01,0.65)	-0.07 (-0.16,0.005)	-0.35 (-0.59,-0.19)	1.14 (0.90,1.34)	0.43 (0.35,0.52)	-0.17 (-0.32,-0.06)
1Y delay	0.40 (0.09,0.63)	-0.08 (-0.16,-0.02)	-0.36 (-0.56,-0.21)	1.11 (0.92,1.30)	0.40 (0.33,0.49)	-0.20 (-0.32,-0.10)
3Y delay	0.31 (-0.03,0.57)	-0.11 (-0.19,-0.05)	-0.40 (-0.62,-0.24)	0.90 (0.68,1.11)	0.32 (0.26,0.41)	-0.31 (-0.45,-0.20)

Parentheses contain the 5th and 95th percentiles of multipliers computed from the posterior distribution of estimated parameters. Variables include output (Y), consumption (C), and private investment (I).

(出所) Leeper et al.(2010)より抜粋

同論文の主要な結果は次のとおりである。まず、社会資本形成の実施ラグは、短期には民間投資を減少させ、労働量と GDP の増分を減少させる。社会資本の生産性(α^G) が正であるために、家計は政府による社会資本投資が将来の限界生産性を高めると予測する結果、実施ラグがまったく存在しない場合よりも、実施ラグが存在する場合に短期における労働供給量が減少する。この実施ラグにより、短期においては政府支出の GDP 押し上げ効果は大きく抑制される。社会資本の実施ラグが短期の GDP に影響する一方で、財政調整は長期の GDP を押し下げる。米国政府は 1960 年以降、政府債務を安定化させるための主たる手段として、政府消費支出の抑制と所得税の引き上げを行ってきた。論文中では徴税ルール、財政支出ルールのパラメータ・カリブレーションを 1960 年以降の米国政府のデータで行っているため、長期においては財政調整によって GDP の増分が抑制される結果になっている。

② Non-Ricardian households（異時点間の消費の最適化を行わない家計の導入）

(Gali et al.(2007))

RBC モデルや標準的な DSGE モデルでは、政府支出に対して家計消費はネガティブに反応する（クラウドイングアウト）。この家計消費のクラウドイングアウトは、家計の異時点間最適化行動⁹をモデル内で想定しているため、「現在の」財政支出に伴う「将来の」増税期待（予想）が、（税引き後）所得の割引現在価値を減少させることによって引き起こされている（Ricardian equivalent theorem; リカードの等価定理）。こうした異時点間で最適化を行う家計を Ricardian households と呼ぶ。

しかし、現実には財政支出が家計消費のクラウドイン（政府支出に対する家計消費のポジティブな反応）を引き起こしているという現象が、VAR などを用いたいくつかの実証分析によって観察されている。Gali et al. (2007)では、この理論と現実のギャップを埋めるために、家計の異質性を導入したニューケイジアンモデルを構築し、財政支出がどのような条件の下で家計消費のクラウドインを引き起こすのかについて分析をしている。

同論文の主な特徴は、家計部門に標準的な異時点間最適化を行う主体(optimizing households)に加えて、異時点間最適化を行わない主体(rule-of-thumb households)を導入していることであ

⁹ 将来の出来事を予想した上で、生涯の効用が最大化されるように、現在の選択（消費や労働供給）を行うという想定。

る。このアイデアは、財政支出に伴う将来の増税を予期「しない」家計主体を導入することで、異時点間最適化行動によるクラウドイングアウトの効果を減少させようというものである。つまり、現代マクロ経済学の枠組みにおいては、家計は現時点だけでなく、将来も念頭に入れて消費の意思決定をすることが前提とされているが、一部の家計はそうではないという想定をおく。より具体的には、現時点における所得をその時点ですべて消費してしまう（異時点間で最適化を行わないので、富を次期以降に持ち越さない）家計が一定程度存在することをモデルに組み込むものである。こうした「非リカーディアン(Non-Ricardian)」世帯の比率が高まるほど、政府支出の増加に伴って消費のクラウドインが生じやすくなると考えられる。

非リカーディアン家計モデルの定式化

t 時点での消費および労働時間を C_t および N_t 、効用関数を $U(\)$ と表すとき、各主体の効用関数と予算制約式は以下のように定式化されている：

- ・異時点間で最適化を行う家計 (Optimizing households)

$$\max U(C_t^o, N_t^o) \equiv \log C_t^o - \frac{N_t^{o(1+\psi)}}{(1+\psi)} \quad (1-6)$$

$$s. t. P_t(C_t^o + I_t^o + R_t^{-1}B_{t+1}^o) = W_t P_t N_t^o + R_t^k P_t K_t^o + B_t^o + D_t^o - P_t T_t^o \quad (1-7)$$

- ・異時点間で最適化を行わない家計 (Rule-of-thumb households)

$$\max U(C_t^r, N_t^r) \equiv \log C_t^r - \frac{N_t^{r(1+\psi)}}{(1+\psi)} \quad (1-8)$$

$$s. t. P_t C_t^r = W_t P_t N_t^r - P_t T_t^r \quad (1-9)$$

$$\Leftrightarrow C_t^r = W_t N_t^r - T_t^r$$

ここで右肩の添字 o, r はそれぞれ *optimizing* と *rule-of-thumb* の頭文字を取ったものである。また P_t, W_t, T_t はそれぞれ物価水準、実質賃金、一括税を、また D_t, R_t, R_t^k は企業からの配当、国債からの名目リターン、資本のレンタル料を表す。

異時点間最適化を行う主体の予算制約式には、物的資本(K_t^o)と国債(B_t^o)という貯蓄に関連する2つの変数が存在している。一方で、異時点間最適化を行わない主体の予算制約式(1-9)には、富を翌期以降に持ち越すための変数が存在せず、各期の可処分所得がすべて消費に充てられていることがわかる。

経済全体で集計化された家計消費は、非リカーディアン家計のシェアを示すパラメータ λ を用いて、以下のように異時点間最適化を行う主体の消費と異時点間最適化を行わない主体の消費との加重平均で決定される：

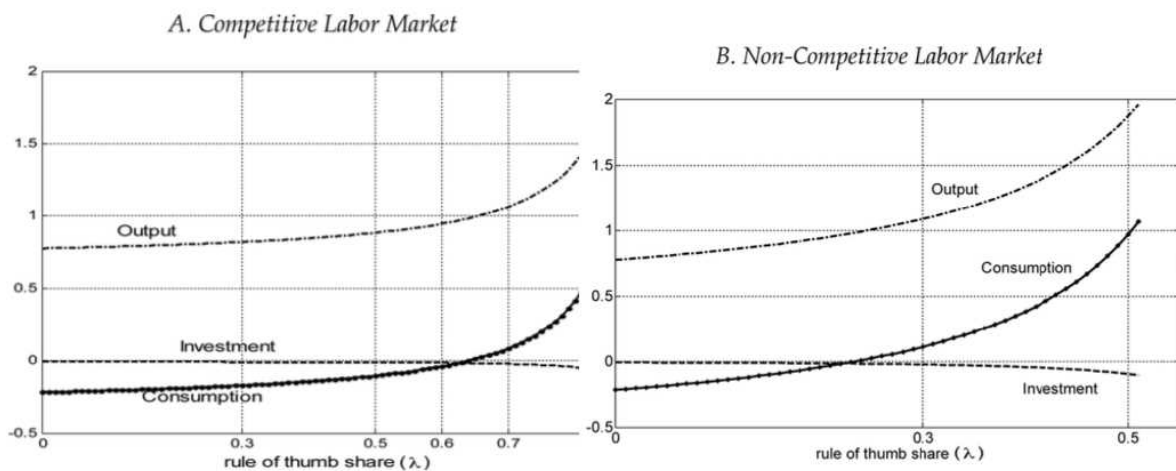
$$C_t \equiv \lambda C_t^r + (1 - \lambda) C_t^o \quad (0 \leq \lambda \leq 1) \quad (1-10)$$

その他のセットアップは標準的な Calvo 価格型¹⁰ニューケインジアンモデルに依拠しているが、労働市場は競争的市場(competitive labor market) と非競争的市場(non-competitive labor market) の2つの状況を設定し、場合分けしてモデルの振る舞いを検証している。労働市場が競争的とは、家計が所与の賃金(w_t)に基づき労働供給を最適化条件より決定する状況のことである。一方で、非競争的市場とは、モデル上では何らかの中央集権的な組合によって賃金水準が決定される状況とされている。

図 1-1 は正の外生的な 1 単位の政府支出ショックに対する主要な変数(GDP・投資・消費)のショックを与えた瞬間の反応の比(すなわち、 $\text{impact multiplier} = \Delta Y(0)/\Delta G(0)$)を、各家計の割合を示すパラメータ λ の関数にしたものである。左のグラフは競争的な労働市場、右のグラフは非競争的な労働市場のケースである。各ケース共に GDP と消費の乗数効果は λ の増加関数になっており、異時点間最適化を行わない主体(つまり非リカーディアン家計)の割合が増加するにつれて乗数効果が増加している。

$\lambda = 0$ 、すなわちすべての家計が非リカーディアンである標準的なニューケインジアンモデルの場合は、いずれのケースにおいても政府支出の GDP に対する乗数効果は 1 未満であり、さらに消費の乗数効果がマイナスであるためクラウディングアウトが発生していることがわかる。

図 1-1 政府支出乗数の λ に対する感応度



(出所) Gali et al.(2007) Figure3

異時点間最適化を行わない主体の割合(λ)が増加するにつれて GDP と消費の乗数効果は増加していくが、労働市場が競争的な場合(グラフ左)と非競争的な場合(グラフ右)では、消費のクラウドイン(すなわち、 $\Delta C(0)/\Delta G(0) > 0$)が発生する位置が異なる点に注意が必要である。労働市場が競争的な場合、消費のクラウドインが発生する条件は、集計化された消費に占める最適化行

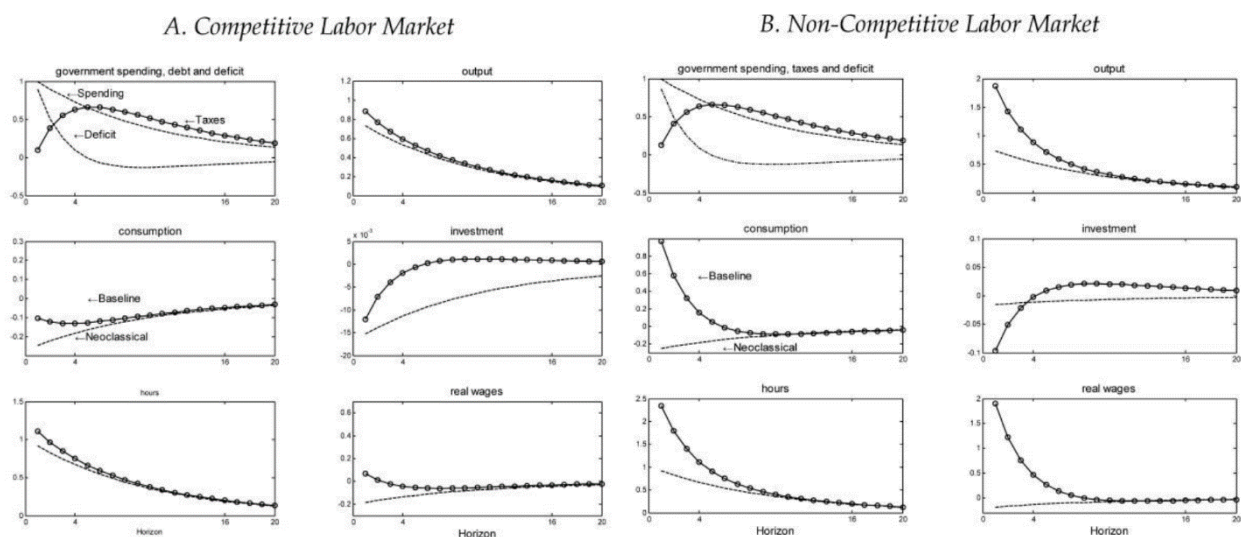
¹⁰ 価格の硬直性に関するミクロ理論の一つであり、①企業が価格改定を每期できるのではなく、確率的にランダムに選ばれた一定割合の企業のみが価格改定できる、②企業は確率的に将来の価格改定ができない状況を見込んだ上で動学的な最適価格を設定する、③物価は、最適価格に改定できる企業とそうでない企業の加重平均によって決まる、などの設定をすることで、硬直的な価格調整を表現する(鈴木(2006))。そのほかにも価格変更のタイミングが Calvo 型と異なる Taylor 型 staggered price モデル、すべての企業は価格を調整できるが、一定の調整コストがかかるとする Rotemberg 型の調整コストモデルなどがある。加藤(2007)第 2 章などを参照。

動を行わない主体の割合が6割以上とかなり非現実的なものになっている。しかし、労働市場が非競争的な場合では、消費のクラウドインの発生条件が $\lambda \geq 0.25$ と、労働市場が競争的な場合よりも尤もらしくなっている。

図 1-2 は政府支出ショックに対する主要変数の時間を通じた変化を描写したものである。マーク付き実線と破線では、パラメータの設定が変えられている。破線(新古典派モデル)は需要の価格弾力性(論文中では Calvo パラメータ θ)と、 λ を0(つまり需要が価格に瞬時に反応し、かつ家計が全員最適化を行う新古典派的な状況)に設定した場合のインパルス応答である。グラフより、主要変数のほぼ全てで、非リカーディアン家計を考慮したベースラインケース(実線)が新古典派ケースよりも上方に位置していることがわかる。また、労働市場が競争的な場合と非競争的な場合を比較すると、労働市場が非競争的な場合、特に消費の押し上げ効果が高いことがみてとれる。

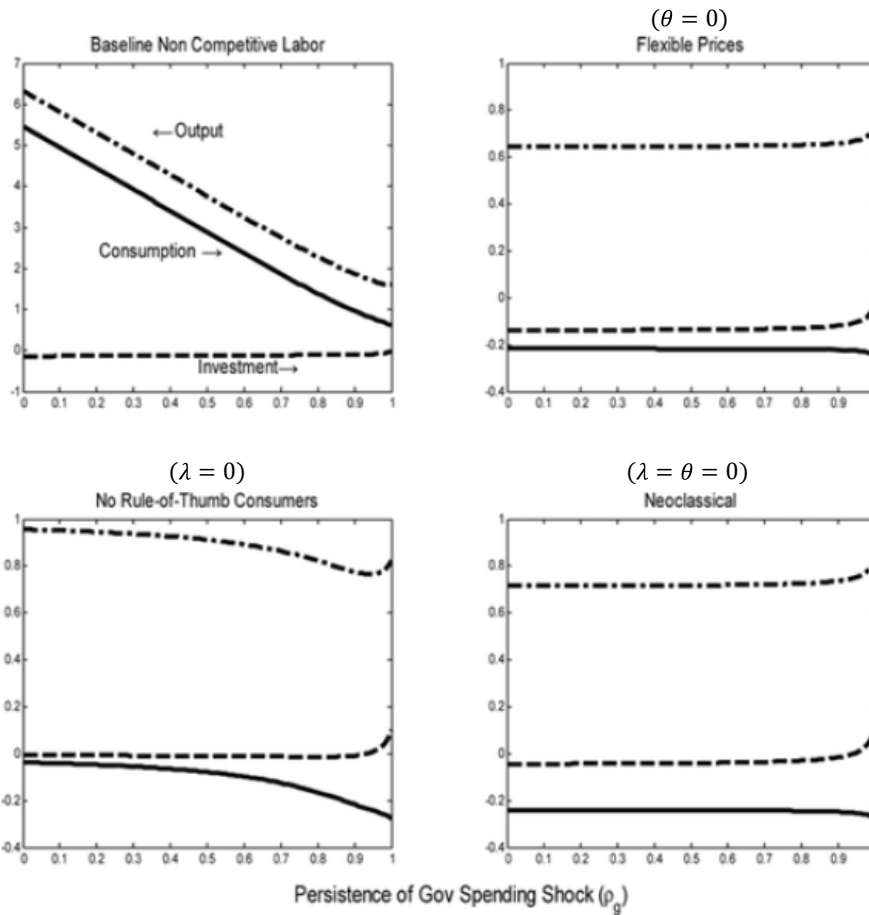
このグラフでは、 $\theta = 0$ かつ $\lambda = 0$ を同時に考えているために、価格の硬直性と異時点間最適化を行わない主体のどちらが消費のクラウドインに寄与しているかが判りにくい。消費のクラウドインと各仮定との相関関係を整理したのが図 1-3 である。横軸は政府支出ショックの持続性(AR(1) 項の係数)である。左上がベースライン、右上が $\theta = 0$ 、左下が $\lambda = 0$ 、右下が $\theta = \lambda = 0$ と設定した場合のグラフである。右上と左下のグラフでは、共に消費がマイナスである。一方で、価格の硬直性と異時点間最適化を行わない主体が同時に存在する場合、ラグ項の係数が0から1までの区間すべてで消費のクラウドインが発生していることが確認できる。つまり、消費のクラウドインは価格の硬直性と異時点間最適化を行わない主体の相互作用によって発生する。

図 1-2 政府支出ショックに対する主要変数のインパルス応答(ベースラインモデルと新古典派モデルの比較)。マーク付き実線:ベースライン設定、破線:新古典派設定($\theta = \lambda = 0$)



(出所) Gali et al.(2007) Figure4

図 1-3 政府支出ショックの持続性を変えた場合の乗数の変化



(出所) Gali et al.(2007) Figure5 (一部修正)

③ Non-separable preferences over consumption and leisure (消費と余暇を掛け合わせた形状(非分離型)の効用関数の導入)

(Linnemann(2006); Bilbiie(2009); Bilbiie(2011))

標準的な DSGE モデルでは、財政政策を含む政府支出が生じると、将来の増税を見込んだ負の資産効果によって、消費と余暇に対する需要が減退する。その結果、モデル下では政府支出の増加によって雇用量が増加することが示唆される。言い換えると、財政政策に対して消費が正の相関（すなわちクラウドイン）を持つためには、雇用と消費が正の相関を持つ必要がある。Linnemann(2006)では、効用関数が①加法分離性を持たない（これを非分離型と呼ぶ）、②消費の異時点間の代替弾力性が 1 より小さい、という 2 つの条件を満たす場合には、政府支出増により、消費のクラウドインが生じることを示した。

同論文では、以下のような効用関数の定義を用いている：

$$u(c_t, l_t) = \begin{cases} \ln c_t + v(l_t) & \text{if } \sigma = 1 \\ \frac{1}{1-\sigma} c_t^{1-\sigma} v(l_t) & \text{if } \sigma > 1 \end{cases} \quad (1-11)$$

ここで、 c_t は消費、 l_t は余暇であり、 n_t を労働供給とすると、 $l_t = 1 - n_t$ である。右辺の一行目は対数分離型 (log-separable)、二行目は非分離型 (non-separable) と呼ばれる。とくに $\sigma > 1$ の非分離型において、余暇の関数 $v(l_t)$ は、消費の定常的な成長 (steady state growth) を表現するために、 $v(l_t) > 0$ 、 $v'(l_t) < 0$ かつ $v''(l_t) > 0$ が仮定されている。ここでは、消費に関する異時点間の代替弾力性 (の逆数) を示す σ が1より小さい可能性は考慮されていない¹¹。

以上の設定の下、 $v(l_t)$ の具体的な関数形を含んだ効用関数は、以下のように定式化されている：

$$u(c_t, l_t) = \frac{1}{1-\sigma} c_t^{1-\sigma} (1-l_t)^{1+\vartheta} \quad (1-12)$$

ここで、

$$\vartheta = \theta(\sigma - 1) - 1 \quad (1-13)$$

$$\theta \equiv \frac{\alpha}{\frac{c}{y}} = \frac{\text{労働分配率}}{\text{GDPに占める消費の割合}} \quad (1-14)$$

である。

上記の仮定の下では、効用関数が非分離型の場合、通常の効用関数のように一回微分で正、二階微分で負 (すなわち $u_c > 0, u_l > 0, u_{cc} < 0, u_{ll} < 0$) という制約のほかに、以下のように消費と余暇の代替に関連して、消費の限界効用が余暇の変化 (1階微分) にも依存するようになる：

$$\frac{\partial^2 u(c_t, l_t)}{\partial c_t \partial l_t} = c_t^{-\sigma} v'(l_t) < 0 \quad (1-15)$$

この式は、例えば財政支出等によって雇用の増加 (つまり余暇 l_t の減少) にすると、家計にとっては消費の限界効用が増加することから、家計は消費を増加させる、ということを示唆する。すなわち、効用関数を非分離型にすることで、雇用 (余暇) の変化が消費の限界効用にも影響を与えるよう設定し、現在の雇用が増加すれば同時点の消費も増加する状況を表現することができる。

ただし、 $u_{cl} < 0$ は消費のクラウドインに必要な条件ではあるものの、これだけでは消費のクラウドインは発生しない。例えば、標準的な景気循環モデルで用いられる以下のような効用関数：

$$u(c_t, l_t) = \frac{(c_t^\gamma l_t^{1-\gamma})^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad (1-16)$$

は、 $u_{cl} < 0$ を満たしているが、消費のクラウドインを実現しないことがわかっている。Linnemann (2006) では、この条件 ($u_{cl} < 0$) に加えて、雇用量と消費の増加の関係が、財政支出による負の資産効果 (将来増税による実質的な所得減) による消費の減少を打ち消すほど強いことが、クラウドインの発生条件であると指摘している。

¹¹ 相対的危険回避係数とも呼ばれ、 σ が小さければ消費が増加するときの限界効用の低下はゆっくりとしたものになり、家計は消費を経時的に変化させてもよいと考えるようになる (Romer (2011))。逆に大きいほど限界効用の低下は大きくなり、消費を経時的に変化させようとはしなくなると言える。

政府支出が雇用量に与える影響は、以下の対数線形近似（ハット記号で表現）した資源制約式（resource constraint）によって決まる：

$$\hat{n}_t = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\hat{k}_t + \frac{\delta}{\alpha} \frac{k}{y-c}\hat{i}_t + \frac{1}{\alpha} \frac{g}{y-c}\hat{g}_t \quad (1-17)$$

ここで \hat{n}_t は労働供給（ただし $n_t = 1 - l_t$ ）、 \hat{k}_t は資本ストック、 \hat{i}_t は投資、 y は生産量、 \hat{g}_t は政府支出を表し、労働供給は政府支出の増加関数であることを示す。資本ストック(\hat{k}_t)は前期の自身の値のみで決定される状態変数であるため、財政政策によって民間投資(\hat{i}_t)が過剰に減少しない限り（ここでは減価償却率を表す δ が小さければ）、政府支出の増大は雇用の増加を引き起こす。これにより消費のクラウドインが発生する。

④ Deep habits（個別財の消費に関する習慣形成を盛り込んだ効用関数の導入） (Ravn et al.(2006))

Ravn et al.(2006)は、家計の効用関数に個別財の消費行動に関する習慣形成（Deep habits）を導入することで、政府支出に対する家計消費や賃金の正循環的な反応を発見した。同論文以前においても、Christiano et al.(2005)等では、消費を集計された一つのものとして、消費から得られる効用が過去の消費水準に影響を受けるものとして、習慣形成をモデルに取り込んだ方法が提案されていた。一方、Ravn et al.(2006)では、①個別の消費財ごとの習慣形成を導入し、②過去の一時点だけでなく、過去の消費行動の履歴を消費から得る効用の基準点にするという、より一般的な形での消費の習慣形成の定式化がなされた。

消費の習慣形成とは、過去の消費水準を基準点にして消費の効用を測ることを意味し、従来型では効用関数は以下のように定式化される：

$$U(C_t - \theta C_{t-1}) \quad (1-18)$$

ここで、 C_t は集計された消費水準、 θ は習慣形成の強度を表す。 $\theta > 0$ であれば、消費に習慣形成が存在することになり、 θ の値が高くなるにつれて消費から得られる効用が減少する。

Ravn et al. (2006) は、この習慣形成を、上述のとおり次の2つの観点から、より一般的な形に拡張している。1点目は、個別の消費財ごとの習慣形成を導入したことである。そして2点目は過去の1時点だけでなく、過去の消費行動の履歴を消費から得る効用の基準点にしていることである。

具体的な効用関数の定式化は以下のとおりである：

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(x_t^j - v_t, h_t^j) \quad (1-19)$$

ここで、 h_t^j と v_t は家計 j の労働供給とAR(1)過程に従う確率的な選好ショックである。 x_t^j は家計 j の習慣調整済み消費(habit-adjusted consumption)を表し、以下のように定義される：

$$x_t^j = \left[\int_0^1 (c_{i,t}^j - \theta s_{i,t-1})^{1-\frac{1}{\eta}} di \right]^{\frac{1}{(1-\frac{1}{\eta})}} \quad (1-20)$$

$c_{i,t}^j$ は家計 j の t 時点における財 i の消費である。Ravn et al.(2006)以前の標準的な習慣形成と異なり、集積された消費ではなく個別財の消費である点に注意が必要である。そして、 $s_{i,t-1}$ が消費 $c_{i,t}^j$ を評価する基準点であり、論文中では習慣形成の累積量(stock of habit formation)と呼ばれている。 θ は各個別財の消費の習慣形成(habit formation)の程度を測るパラメータである。

また習慣形成の累積値 $s_{i,t}$ は以下のような運動方程式(law of motion)に従って形成される：

$$s_{i,t} = \rho s_{i,t-1} + (1 - \rho)c_{i,t} \quad (0 \leq \rho < 1) \quad (1-21)$$

ここで、 $c_{i,t}$ は t 時点の横断面での平均値($c_{i,t} \equiv \int_0^1 c_{i,t}^j dj$)、すなわち経済全体における消費財 i の消費量の平均値であり、個々の家計 j にとっては外生的に与えられる。 ρ は消費財 i の累積習慣形成値の、消費の横断面平均値への収束速度を表すパラメータである。仮に $\rho = 0$ ならば、(1-20)式において t 期に考慮される習慣形成 $s_{i,t}$ は、 $t-1$ 期の消費量の平均値 $c_{i,t-1}$ によってのみ決まることを意味する。

(1-21)にはRavn et al. (2006)の拡張が集約されている。すなわち、ある財の習慣形成($s_{i,t}$)は、その財の過去の習慣形成の累積値($s_{i,t-1}$)と、ある時点における横断面平均値($c_{i,t}$)の加重平均によって決まるように定式化されている。これを、Ravn et al. (2006)ではdeep habitsと呼んでいる。

deep habitsの下では、個々の生産者は、(現在の価格にはまったく反応しない)過去の販売に依存する需要関数を考慮して生産せざるをえなくなる。この特徴は、Phelps and Winter (1970)の消費者市場における価格に関する部分均衡モデルや、Klemperer (1995)のスイッチングコスト¹²でアドホックに置かれてきた仮定とも類似のものである。これらのモデルの欠点は、独占的競争¹³下での企業のマークアップ(利幅)のダイナミクスが、観察データ上は景気と負の相関(counter-cyclical)を示すものの、モデル上では正の相関を示すという非整合性である。Ravn et al.(2006)の主要な貢献は、deep habitsの導入により、景気と逆サイクルを描くマークアップのダイナミクスを表現できることを示したことである。

Ravn et al. (2006)のSection 2で導出されているdeep habitsが存在する場合のマークアップ μ_t は以下で与えられる：

¹² 消費者がある財のブランドへの愛着(ロイヤルティ)がある場合に生じるであろう、他の財への乗り換えコスト。

¹³ ニューケインジアンモデルでは(伝統的なケインジアンと同様)、企業は自社の製品については独占力を持っていて、自ら価格を設定すると想定している。つまりプライステイカーではないが、価格は他社の動向を見ながら決定するので、完全に独占企業でもない。このような状況を(マクロ経済学の枠組みで)定式化したのがBlanchard and Kiyotaki(1987)による独占的競争モデルである(加藤(2007))。

$$\mu_t = \left[1 - \frac{1}{\eta \left(1 - \frac{\theta c_{t-1}}{c_t} \right) + \theta E_t r_{t,t+1} v_{t+1}} \right]^{-1} \quad (1-22)$$

右辺の $\eta(1 - \theta c_{t-1}/c_t)$ は短期の需要に対する価格弾力性、そして $\theta E_t r_{t,t+1} v_{t+1}$ は、現在の売上の増加によって発生する将来の利潤の割引現在価値である。 $\theta, \eta, r_{t,t+1}$ はそれぞれ習慣形成の強度、習慣形成調整済み消費の異時点間弾力性、確率的割引因子である。

deep habits が存在する場合に、マークアップのダイナミクスが景気と負の相関関係を持つようになる理由は、右辺の θ を含む2つの要素（需要の価格弾力性、および将来の利潤）に由来する。論文中では、短期の需要に対する価格弾力性がマークアップに与える影響を価格弾力性効果 (price-elasticity effect of deep habits)、現在の売上の増分によって発生する将来の利潤の割引現在価値がマークアップに与える影響を異時点間効果 (intertemporal effects of deep habits) と呼称している。現在の集計された消費需要(c_t)が増加すると、短期の需要に対する価格弾力性 $\eta(1 - \theta c_{t-1}/c_t)$ が上昇することでマークアップが減少する。これが、deep habits が引き起こすマークアップの景気との負の相関の1つ目の経路であり、価格弾力性効果と呼ばれるものである。

もう1つの経路は、実質金利 $r_{t,t+1}$ の変化がマークアップに与える影響である。実質金利が増加すると、将来の利潤の現在価値が低下するので現時点で投資をするインセンティブが低下する。これを表しているのが $\theta E_t r_{t,t+1} v_{t+1}$ であり、異時点間効果と呼ばれる2つ目の経路である。これら2つの項は、deep habits が存在しない場合（すなわち $\theta = 0$ のとき）に消失し、均衡マークアップは一定の値 $(\eta/(\eta - 1))$ になる。

⑤ Spending reversals（現在の政府支出増に対する将来の財政政策の変更への期待の導入）

(Corsetti et al.(2010); Corsetti et al.(2012))

Corsetti et al.(2012)では、VARモデルによる政府支出の波及経路に関する実証研究において、現在の政府支出の増加が将来の政府支出の減少を伴っていること (self-correcting or debt-stabilizing) に着目し、将来の財政政策の変更に対する期待が、標準的なDSGEモデル上で財政支出の波及経路にどのような影響を与えるのかについての検証を行っている。その結果、現在の政府支出を増加する際、将来の政府支出の減少(政府負債を減少させるための財政支出削減行動)の期待が存在するのであれば、言い換えれば、spending reversals が組み込まれていれば、現時点の政府支出増が消費のクラウドインを発生させうることを指摘した。

同論文は、開放経済型¹⁴ニューケインジアンDSGEによるこれまでの理論分析に関する先行研究では、政府支出を外生的な過程で記述しており、政府支出が政府負債や経済状況に応じて（つまり内生的に）変化する可能性を捨象していると批判した。その上で、VARモデルの結果を引用して"Debt stabilizing"を明示的にモデルに組み込むことの有用性を主張している。同論文の政府支出の具体的な定式化は以下のとおりである：

¹⁴ 2カ国以上の国が存在し、海外との財やサービスの輸出入が存在すると想定したモデル。

$$G_t = (1 - \rho)G + \rho G_{t-1} - \psi_G D_{R_t} + \varepsilon_t, \quad T_{R_t} = \psi_T D_{R_t} \quad (1-23)$$

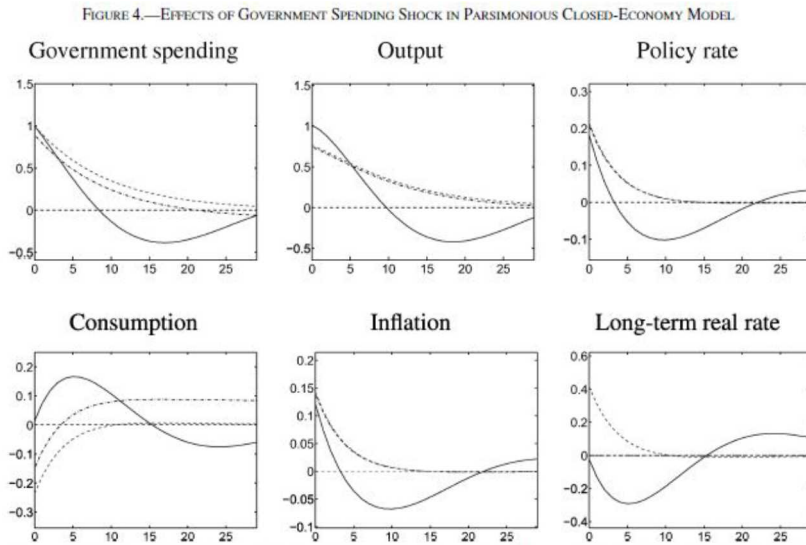
$$\text{where } D_{R_t} \equiv \frac{D_t}{P_{t-1}} \quad (1-24)$$

ここで、 G_t は政府支出、 D_t は t 期初の政府債務残高であり、前期の物価 P_{t-1} で実質化したものが D_{R_t} である。 $T_{R_t}(= T_t/P_t)$ は実質化した税収で、 ε_t は政府支出に対する外生的なショックである。時間の添字が入っていない政府支出 (G) は定常状態 (steady state) における値を示す。

ψ で表されるパラメータ (ここでは非負と仮定) は、政府支出 (ψ_G) および税 (ψ_T) に対する政府債務のフィードバック効果を捕捉している。すなわち、期初の実質政府債務残高の量 D_{R_t} が、その年の政府支出 G_t および税収 T_{R_t} を決定づけるような定式化を行っている。ベースラインモデルでは $\psi_G = \psi_T = 0.02$ と設定されており、 $\psi_G = 0$ を従来型の no-spending reversal のケースとしている。図 1-4 は分析結果の要約である。

消費のダイナミクスを見ると明らかなように、no-spending reversal シナリオ (破線) では消費はクラウドアウトされるが、spending reversal が存在する (実線) と消費のクラウドインが発生している。同論文では、Rule-of-thumb household (非リカーディアン家計) のようなアドホックな仮定を導入せずとも、消費のクラウドインを発生させることは可能であると主張している。

図 1-4 政府支出ショックのインパルス応答 (ニューケインジアン DSGE)



Responses are shown for fiscal baseline scenario with endogenous spending reversal (solid lines), no-reversal scenario (dashed lines), and unchanged tax burden scenario (dashed-dotted lines); parameterization otherwise as in table 1, except for $\epsilon = 1$, no investment dynamics, and simplified interest rate rule. Responses are measured in deviations from steady state: in output units for quantities, and in percent for interest rates and inflation. Horizontal axes measure time in quarters.

(出所) Corsetti et al. (2012) Figure4

⑥ Edgeworth complementarity between private consumption and government spending (個人消費と政府消費のエッジワース補完性の導入)

(Barro(1981); Karras(1994); Bouakez and Rebei(2007))

1990年以前は、政府消費と家計消費には直接的な関係はないと考えられてきた。その後、政府消費と家計消費に関する実証研究が進むにつれて、これら2つの変数は代替関係にあることが明らかになり、Barro(1981)の先駆的な研究によって政府消費と家計消費の代替関係がモデル化された。さらに実証研究が進むにつれて、政府消費と家計消費は代替関係ではなく補完関係にある可能性が示唆されるようになったことから、効用関数に政府消費を導入し、政府消費の増加が家計の実効消費の限界効用を増加させて家計消費を増加させるモデルを表現した。

こうしたモデルにより、家計消費のクラウドインが生じることが示されている。ただしエッジワース補完性は主として政府消費を対象としており、本研究が主たる関心をもつ政府投資とは異なると考えられるため、ここでは詳細なレビューは行わない。

2章 VAR モデルによる乗数効果の推計

1.2.2 節でも触れたが、VAR などによる実証研究では政府による財政支出によって家計の消費のクラウドインが確認される一方、DSGE モデルではクラウドインが描写できず、この結果の矛盾を財政政策パズルと呼んだ。本研究の究極的な目標も財政政策パズルを解決する DSGE モデルの構築に他ならないが、DSGE モデルの構築に先立って VAR によるクラウドインの存在を確認しておくことが望ましいだろう。また既存研究では、VAR と DSGE モデルのインパルス応答を比較することで、DSGE の尤もらしさをチェックすることが一般的に行われているため、将来的な DSGE モデルの頑健性の確認につながる作業であると考えられる。

VAR とは複数の変数間における影響を考慮した時系列モデルである。本章では、DSGE モデルの構築に先立って、VAR モデルの概要の説明と VAR モデルによる財政乗数の試算を行う。

2.1. VAR の概要

2.1.1. VAR モデルとは

多変量自己回帰モデル(Vector Autoregressive model: VAR)は自己回帰モデルを多変量に拡張したモデルであり、変数間の動学的関係の分析を行うことのできる時系列モデルである¹⁵。分析の目的に合わせた動学的関係に興味のある n 個の変数のベクトルを以下のとおり表すとする：

$$y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{nt})' \quad (2-1)$$

VAR は一変量の自己回帰モデル (AR) を一般化したモデルと言うこともできる。AR(p)が自身の値を 1 期前から p 期前までの過去の値に回帰させるモデルであるのに対し、VAR(p)は y_t を定数と自身の p 期前までの過去の値に回帰させるモデルであり、以下のように表せる：

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2-2)$$

where $\varepsilon_t \sim W.N. (\Sigma)$

ここで c は $n \times 1$ の定数ベクトル、 ϕ_i は $n \times n$ の係数行列、 ε_t が分散共分散行列 Σ のホワイトノイズ¹⁶である。すなわち、 n 個の変数を持つ VAR(p) モデルは n 本の回帰式からなり、パラメータは各変数を定数と全変数の p 期間のすべての値に回帰させて得られる。したがって n 変数 VAR モデルは誤差項まで含めると $\frac{n(n+1)}{2}$ 個のパラメータを持つ大規模な回帰モデルである。

上記の VAR モデルによって得られたパラメータを用いて経済分析を行う方法のひとつに、イン

¹⁵ 以下、本節における VAR の説明は沖本(2010)に多くを負っている。VAR およびインパルス応答関数についての詳細は同書第 4 章などを参照。

¹⁶ ベクトル過程 ε_t がすべての t 時点において $E(\varepsilon_t) = \mathbf{0}$ かつ

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}') = \begin{cases} \Sigma, & k = 0 \\ \mathbf{0}, & k \neq 0 \end{cases}$$

を満たすとき、ベクトルホワイトノイズと呼ばれる。弱定常で自己相関を持たない。また対角行列である必要はなく、各成分は異時点間の相関を持たないが、同時点での相関は許容する。

パルス応答関数があり、マクロ経済に関する実証研究でも採用される標準的な手法である¹⁷。ここで、式(2-2)における誤差項の分散共分散行列 Σ が対角行列でないと仮定し、 j 番目の変数の誤差項 ε_{jt} だけに1単位（もしくは1標準偏差）のショックを与えたときの y_{it+k} 、すなわち $i(\neq j)$ 番目の変数の k 期先の値の変化を求めたものを、 y_j のショックに対する y_i の k 期後の非直交化インパルス応答と呼ぶ。数式では以下のように表すことができる：

$$IRF_{ij}(k) = \frac{\partial y_{i,t+k}}{\partial \varepsilon_{jt}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2-3)$$

この式を用いて、 $k = 0$ から逐次的に IRF を求めていけば、変数 j に生じた外生的ショックが他の変数に経時的にどのような影響を与えるかを調べることができる。

ただし、VAR モデルにおけるベクトルホワイトノイズは同時点での誤差項同士の相関を許容するが、非直交化インパルス応答関数ではこの相関を無視した形になっている。つまり各誤差項が完全に独立であることを前提に ε_{jt} のみにショックを与えているが、誤差項同士が相関している場合、たとえば ε_{1t} が（上昇）ショックを受けた場合、 ε_{2t} も上昇するという場合がありうる。

この問題に対処したのが直交化インパルス応答関数である。詳細は沖本(2010)等の専門書に譲るが、簡潔に記すと、分散共分散行列 Σ を三角分解あるいはコレスキー分解などを用いて互いに無相関な誤差項に分解¹⁸したうえで、その誤差項にショックを与えて他の変数の挙動を調べる方法である。一般的にインパルス応答関数という場合、この直交化インパルス応答関数を指す。

2.2. 財政政策の経済効果に関する VAR モデル

マクロ経済学の実証研究において最も古典的な問いは、ある政策が関心のあるマクロ変数に与える影響をどのように定量化するか、というものである。これはすなわち、 Y_t に関心のあるマクロ変数とすると、以下のような動学的因果効果(Dynamic causal effects) を考察することに他ならない。

$$\frac{\partial Y_{t+n}}{\partial \varepsilon_t^r}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2-4)$$

ここで、 ε_t^r はマクロ変数 Y_t に対する予期せざる介入効果である。

近年のマクロ経済学の実証研究では、この動学的因果効果を外生的なショック ε_t^r に対する Y_t のインパルス応答関数として定式化する。インパルス応答関数は VAR のパラメータを推定することで描写されるが、その場合、単に最小二乗法(Ordinary Least Square: OLS) でパラメータを推

¹⁷ 財政政策のマクロ経済に与える影響の分析に VAR を用いた研究としては例えば近藤・井堀(1999)、加藤(2010)、川出・伊藤・中里(2004)などがある。また Iwata(2013)や酒井・小寺・荒木・中澤・石川・中沢・神代(2015)などは DSGE モデルによるインパルス応答関数と比較させるために VAR によるインパルス応答関数を確認している。本研究における VAR も DSGE に先立ってマクロ経済をデータから俯瞰するために行っている点において、Iwata(2013)や酒井他(2015)と目的は同じである。

¹⁸ 一般的には誤差項を互いに無相関な誤差項に分解することは不可能であり、何らかの仮定を置くことになる。例えば、ここでは分散共分散行列 Σ の三角分解を用いれば互いに無相関な誤差項に分解できるという仮定を置いている。

定するだけでは、ある政策効果単体の影響をインパルス応答から計測することはできない。その場合、インパルス応答から純粋な政策効果を得るためには、想定している構造モデルに何らかの識別(identification)の仮定を課さなければならない。本節では、基本的な(誘導形)VARと変数同士の同時点間の関係を表現する構造VARおよびそれらの識別方法について概観し、続く2.3～2.6節で構造VARの識別方法を整理する。2.7節で、比較的一般的に用いられるコレスキー分解による識別制約とRubio-Ramirez et al. (2010)の識別制約を用いて構造VARを推定し、公共投資の乗数効果の定量化を試みる。

2.2.1. 誘導形 VAR

一般的なK変数ラグpのVAR(p)は以下のように表現される。

$$Y_t = C + B_1 Y_{t-1} + \dots + B_p Y_{t-p} + u_t \quad (2-5)$$

ここで、

$$\begin{aligned} Y_t &= (y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{K,t})' \\ C_t &= (C_1, C_2, \dots, C_K)' \\ B: &k \times k \text{ パラメータ行列} \\ u_t &= (u_{1,t}, u_{2,t}, \dots, u_{K,t})' \sim N(0, \Sigma_u) \\ E_t[u_t] &= 0, \quad E_t[u_t u_t'] = \Sigma_u \\ E_t[u_t u_s'] &= 0, \forall_s \neq t \end{aligned} \quad (2-6)$$

であり、誤差項ベクトル Σ_u は対角行列ではないとする。このままだと直感的に分かりづらいため、以下のような政府支出、消費、GDPからなるラグ1の3変数VARを例として考える。

$$\begin{pmatrix} y_t \\ c_t \\ g_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_y \\ c_c \\ c_g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ c_{t-1} \\ g_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{y,t} \\ u_{c,t} \\ u_{g,t} \end{pmatrix} \quad (2-7)$$

ここで、 c_y, c_c, c_g は各方程式の定数項である。これを連立方程式として書き下すと以下のように表現できる。

$$\begin{aligned} y_t &= c_y + b_{11} y_{t-1} + b_{12} c_{t-1} + b_{13} g_{t-1} + u_{y,t} \\ c_t &= c_c + b_{21} y_{t-1} + b_{22} c_{t-1} + b_{23} g_{t-1} + u_{c,t} \\ g_t &= c_g + b_{31} y_{t-1} + b_{32} c_{t-1} + b_{33} g_{t-1} + u_{g,t} \end{aligned} \quad (2-8)$$

上式を見て分かるように、誘導型VARの各方程式は説明変数に同時点間のその他の変数を含まないため、同時方程式モデル(Simultaneous equation model: SEM)ではない。しかし、誤差項ベクトルの分散共分散行列 Σ_u は対角行列ではないため、誤差項 $u_{y,t}, u_{c,t}, u_{g,t}$ は同時点間で互いに相

関している。これは、見かけ上無相関なモデル(Seemingly Unrelated Regression model: SUR)と呼ばれる。一般にはバイアスのない推定量を得るためには、すべての式を同時に推定する必要があるが、誘導型 VAR は各式の説明変数が全ての方方程式で共通という SUR の特殊形になっているために、各式を個別に OLS で推定しても最良線形不偏推定量(Best Linear Unbiased Estimator: BLUE)を得ることができることが知られている。 Σ_u の非対角成分は、残差の共分散から求める。

誘導型 VAR は OLS により不偏推定量が得られるものの、誤差項同士が同時点間で相関しているため、ある変数単体のショックに対し経済主体がどのように反応したかについて分からない。例えば上記の例で政府支出が消費に与える影響 $u_{g,t}$ を変化させることで調べようとしても、 $u_{g,t}$ が $u_{c,t}$ と相関してしまっているために、 $u_{g,t}$ のみの影響を定量化することができない。この問題を解決するためには、誤差項を互いに相関する部分と無相関な部分に分解する必要があるが、一般的にそのような分割は不可能なため、何らかの仮定(識別制約)を置く必要がある。次節では、誤差項の識別のための仮定と VAR の構造表現(Structural representation)について述べる。

2.2.2. 構造 VAR

以下のような VAR(1) モデルを考える。

$$AY_t = BY_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, I) \quad (2-9)$$

ここで、 ε_t は系列相関がない互いに独立な誤差項である。前節の誘導形 VAR との違いは 2 つある。1 つは、誤差項の分散共分散行列 I が単位行列であることである。つまり、誤差項同士は同時点間において相関していない。2 つ目は、左辺のパラメータ行列 A である。このパラメータ行列 A は内生変数間の同時点相関を表したものである。このように、誤差項の分散共分散行列を対角行列と仮定してパラメータ行列 A で変数同士の同時点間関係を捉えることを構造 VAR 表現という。

構造 VAR の問題点は、パラメータ行列 A が存在しているために、説明変数と誤差項が相関してしまい一致推定量が得られないことである。そこで、式(2-9)を以下のように変形する。

$$A^{-1}AY_t = A^{-1}BY_{t-1} + A^{-1}\varepsilon_t \quad (2-10)$$

$$\Rightarrow Y_t = FY_{t-1} + u_t \quad u_t \sim N(0, \Sigma_u) \quad (2-11)$$

ここで、

$$F \equiv A^{-1}B \quad (2-12)$$

$$u_t \equiv A^{-1}\varepsilon_t \quad (2-13)$$

この式(2-11)は誘導形 VAR そのものであり、前節で述べたように各式を OLS で推定することで最良線形不偏推定量が得られる。問題は、いかにして推定した誘導形 VAR のパラメータ(F, Σ_u)から元の構造形パラメータ(A, B)を復元するかである。用いることができる情報は、式(2-12)と式(2-13)、及び u_t が従う確率分布の分散共分散行列 Σ_u である。 I を単位行列とすると、 Σ_u は以下のよ

うに書き換えることができる。

$$\Sigma_u = A^{-1}I(A^{-1})' = A^{-1}(A^{-1})' \quad (2-14)$$

すなわち、構造 VAR の左辺のパラメータ行列 A の逆行列 A^{-1} が分かれば、式(2-12)の $B=AF$ より構造形のパラメータ行列 B が復元できるし、式(2-13)の $\varepsilon_t = Au_t$ を用いて互いに無相関な攪乱項ベクトル ε_t が復元できる。誘導形 VAR から構造 VAR をうまく復元できれば、互いに無相関な攪乱項ベクトルを得ることができ、ある政策が単体で関心のあるマクロ変数に与える影響について分析することが可能になる。

この例の場合、VAR の識別問題とは A の逆行列 A^{-1} を求めることであると言い換えられよう。しかし、式(2-14)を用いて A^{-1} を求めようとしても、 Σ_u が対称行列であるために、求めたい構造パラメータの数と式の数が一致せず、構造パラメータについて連立方程式を解くことができない。

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}}_{6 \text{ 個の変数}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1}}_{9 \text{ 個の変数}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1}}_{9 \text{ 個の変数}} \quad (2-15)$$

つまり、式(2-15)は識別不可能である。誘導形から構造形を復元するためには、構造パラメータ行列 A に対して何らかの識別制約を課す必要がある。この問題に対して解決策としてなされている提案が、次節以降で説明するコレスキー識別や符号制約、長期制約などの識別方法である。

2.3. コレスキー識別（再帰的識別）

前節と同様の構造 VAR 表現を考える。

$$AY_t = BY_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, I) \quad (2-16)$$

ここで、構造パラメータ行列 A に制約を課すことを考える。ここでは行列 A を下三角行列と仮定する。前節と同様の手順で誘導形に変形し、 Σ_u と A^{-1} の関係をみしてみる。

$$A^{-1}AY_t = A^{-1}BY_{t-1} + A^{-1}\varepsilon_t \quad (2-17)$$

$$\Rightarrow Y_t = \tilde{B}Y_{t-1} + \tilde{A}\varepsilon_t \quad (2-18)$$

$$\tilde{A} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 & 0 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & 0 \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} \quad (2-19)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}}_{6 \text{ 個の変数}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 & 0 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & 0 \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}}_{6 \text{ 個の変数}} \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 & 0 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & 0 \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}'}_{6 \text{ 個の変数}} \quad (2-20)$$

未知数の数と方程式の数的一致しているため、 $\tilde{A} = A^{-1}$ を求めることができる。よって A が下

三角行列の場合、構造パラメータ A を誘導形から復元できるため、識別が可能である。ここで問題となるのが、どのようにして下三角行列 \tilde{A} を Σ_u から求めるかであるが、これには一般的にコレスキー分解が用いられる。 Σ_u が正定値行列であれば、 Σ_u のコレスキー分解が存在し、

$$\Sigma_u = PP' \quad (2-21)$$

を満たす下三角行列 P を得ることができる。計量経済分析のソフトウェアでは、このコレスキー分解を利用して誘導型 VAR の残差の分散共分散行列を互いに無相関な攪乱項に分解し、インパルス応答を描写することが多い。

コレスキー分解による識別は、再帰的(リカーシブ) 識別とも呼ばれる。なぜ再帰的といわれるのかを確認するために、(3) 式を外生性が高いと思われる順番に並べ替えてみる。各変数は政府支出、消費、GDP の順に外生性が高いことが予想されるので、以下のように書き換える。

$$\begin{pmatrix} g_t \\ c_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_g \\ c_c \\ c_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \tilde{b}_{13} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \tilde{b}_{23} \\ \tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{32} & \tilde{b}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{t-1} \\ c_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 & 0 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & 0 \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{g,t} \\ \varepsilon_{c,t} \\ \varepsilon_{y,t} \end{pmatrix} \quad (2-22)$$

連立方程式として書き下すと以下のようなになる。

$$g_t = c_g + \tilde{b}_{11}g_{t-1} + \tilde{b}_{12}c_{t-1} + \tilde{b}_{13}y_{t-1} + \tilde{a}_{11}\varepsilon_{g,t} \quad (2-23)$$

$$c_t = c_c + \tilde{b}_{21}g_{t-1} + \tilde{b}_{22}c_{t-1} + \tilde{b}_{23}y_{t-1} + \tilde{a}_{21}\varepsilon_{g,t} + \tilde{a}_{22}\varepsilon_{g,t} \quad (2-24)$$

$$y_t = c_y + \tilde{b}_{31}g_{t-1} + \tilde{b}_{32}c_{t-1} + \tilde{b}_{33}y_{t-1} + \tilde{a}_{31}\varepsilon_{g,t} + \tilde{a}_{32}\varepsilon_{g,t} + \tilde{a}_{33}\varepsilon_{g,t} \quad (2-25)$$

(2-23)では、政府支出は政府支出の構造ショックにのみ影響を受けるが、(2-24)と(2-25)を確認すると、消費は政府支出の構造ショックと消費の構造ショック、GDP はすべての構造ショックの影響を受けるようになっている。つまり、誘導形の攪乱項が以下のように構造形の攪乱項の線形和によって表されている。

$$u_{kt} = \sum_{j=1}^k \tilde{a}_{jt}\varepsilon_{jt} \quad (2-26)$$

このような構造を、再帰的構造(recursive structure) という。そのため、コレスキー分解による識別は再帰的識別ともいわれる。再帰的識別を利用するに当たって、注意が必要なのは外生性が高い順(あるいは低い順)に式を並べて推計する必要があるという点であり、再帰的構造の仮定がなるべく自然になるように式の順番を考慮する必要がある。

2.4. 符号制約 (Sign Restriction)

再帰的識別では、コレスキー分解によって得た下三角行列 P と A^{-1} を対応させて識別を行った

が、 $\Sigma_u = A^{-1}(A^{-1})'$ の分解の仕方は一意ではない。例えば、以下のような直交行列 S を考える。

$$SS' = I \quad (2-27)$$

これを利用してコレスキー分解の式を書き換える。

$$\Sigma_u = PP' = PIP' = PSS'P' = \mathcal{P}\mathcal{P}' \quad (2-28)$$

ここで得られた \mathcal{P} は、構造パラメータ A^{-1} に対応すると考えられるものの、下三角行列ではない。したがって、上記で述べたような再帰的な識別を行うことはできない。この \mathcal{P} は分散共分散行列をコレスキー分解して得られた下三角行列 P と直交行列 S の積によって定義されている。ここで、ランダムに直交行列 S を発生させれば、無数の \mathcal{P} を得ることができる。これは、識別したい構造パラメータ A^{-1} の候補を無数に得られるということであるが、 S は乱数であるので、理論的に整合的でないパラメータも生成されてしまう。何らかの方法で、ランダムに発生させた直交行列 S から得た $\mathcal{P}(=A^{-1})$ の尤もらしさを評価できないだろうか。

$t+n$ 期における構造 VAR を考える。これを以下のような無限期の移動平均モデル(MA(∞)) に書き換える。

$$\begin{aligned} Y_{t+n} &= FY_{t+n-1} + A^{-1}\varepsilon_{t+n} \\ &= F(FY_{t+n-2} + A^{-1}\varepsilon_{t+n-1}) + A^{-1}\varepsilon_{t+n} \\ &= F^2FY_{t+n-2} + A^{-1}\varepsilon_{t+n} + FA^{-1}\varepsilon_{t+n-1} \\ &\vdots \\ &= A^{-1}\varepsilon_{t+n} + FA^{-1}\varepsilon_{t+n-1} + F^2A^{-1}\varepsilon_{t+n-2} + \dots + F^nA^{-1}\varepsilon_t + \dots \end{aligned} \quad (2-29)$$

これを $n \times 1$ ベクトル Y_{t+n} 第 i 要素を $n \times 1$ ベクトル ε_t の第 j 要素について微分すると、以下のインパルス応答関数を得る。

$$\frac{\partial Y_{i,t+n}}{\partial \varepsilon_{j,t}} = \{F^n A^{-1}\}_{i,j} = \{F^n PS\}_{i,j} \quad (2-30)$$

ここで、 $\{F^n PS\}_{i,j}$ は $n \times n$ 行列の (i,j) 成分を意味する。

このインパルス応答関数をみると、インパルス応答の形状は誘導形のパラメータ F と、残差をコレスキー分解することで得られた P とランダムに発生させた直交行列 S の積に依存することがわかる。符号制約の発想は、直交行列 S をランダムに大量に生成し、 $\mathcal{P}(=A^{-1})$ を作成してインパルス応答を描写して、得られたインパルス応答の形状を制度情報（例えば次節参照）や経済理論と照らし合わせて、 $\mathcal{P}(=A^{-1})$ の尤もらしさを評価しようというものである。最終的なインパルス応答関数は、事前に課した制約（＝インパルス応答の形状）と整合的だったものだけを集めてきて、平均ないしはメディアンインパルス応答関数を作成することで得る。

符号制約を課したインパルス応答関数の計算方法は以下の通りである

- 手順 1. 誘導形 VAR を推定してパラメータ行列 F と Σ_u を得る。
- 手順 2. Σ_u をコレスキー分解して下三角行列 P を得る。
- 手順 3. 直交行列 S をランダムに作成
- 手順 4. $A^{-1} = P = PS$ を計算
- 手順 5. 得られた A^{-1} をもとにしてインパルス応答を描写
- 手順 6. 符号条件を満たしていればインパルス応答を保存、満たしていなければ破棄する。
- 手順 7. 手順 3-6 を N 回繰り返す
- 手順 8. インパルス応答の平均または中央値とその信頼区間をレポートする

2.5. 長期制約 (Blanchard and Quah(1993))

再帰的制約を用いた識別では、ある内生変数があるショックに対して同時点間においてどのように反応するのかについての知識が必要であった。例として、税金と景気の間を考えると、税金は景気に応じて変動すると仮定する。納税額決定の時点において利用可能な最新の GDP はラグを伴っているため、税金と GDP は同時点間において相関がないと考えられる。これは、税金の方が外生性が高いということであり、下三角行列の再帰的制約において税金の推定式を GDP の推定式の上に配置することを合理化するものであると考えることができる。

識別において、このような制度情報を利用する以外に、経済理論を用いて識別を行うということが考えられる。経済理論を用いれば、長期において変数間がどのような関係にあるのかについて識別の仮定を置くことができる。Blanchard and Quah (1993) は長期のインパルス応答関数に制約を課すことで、誘導形 VAR から構造形 VAR を復元できることを示した。以下ではその概要を解説する。

t 期から $t+n$ 期までの構造 VAR の誘導形表現を考えよう。ここで、 ε_t は互いに独立な構造ショックである。

$$\begin{aligned}
 Y_t &= FY_{t-1} + A^{-1}\varepsilon_t \\
 Y_{t+1} &= F^2Y_{t-1} + A^{-1}\varepsilon_{t+1} + FA^{-1}\varepsilon_t \\
 &\vdots \\
 Y_{t+n} &= F^{n+1}Y_{t-1} + A^{-1}\varepsilon_{t+n} + FA^{-1}\varepsilon_{t+n-1} + \dots + F^nA^{-1}\varepsilon_t
 \end{aligned}
 \tag{2-31}$$

F の固有値が単位円内にあると仮定すると、 $n \rightarrow \infty$ の時の Y の各期のショック (ε_{t+j}) に対する反応の累積和、すなわち累積インパルス応答関数 IRF_∞ は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 IRF_\infty &= A^{-1} + FA^{-1} + \dots + F^nA^{-1} + \dots \\
 &= (I + F + F^2 + \dots + F^n + \dots)A^{-1} \\
 &= (I - F)^{-1}A^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{2-32}$$

これを以下のように変形する。

$$\begin{aligned}
IRF_{\infty}IRF'_{\infty} &= (I - F)^{-1}A^{-1}((I - F)^{-1}A^{-1})' \\
&= (I - F)^{-1}A^{-1}A^{-1}'(I - F)^{-1'} \\
&= (I - F)^{-1}\Sigma_u(I - F)^{-1'}
\end{aligned} \tag{2-33}$$

ここで、累積インパルス応答関数 IRF_{∞} が下三角行列であると仮定する。これはすなわち、あるショックがある内生変数に与える長期的な影響は0であると仮定するということである。そうすると、上式の右辺は誘導形を推定することによって得られるので、右辺が正定値行列であれば、コレスキー分解することで IRF_{∞} を得ることができる。

$$chol((I - F)^{-1}\Sigma_u(I - F)^{-1'}) = DD' = IRF_{\infty}IRF'_{\infty} \tag{2-34}$$

$IRF_{\infty} = (I - F)^{-1}A^{-1}$ より、

$$A^{-1} = (I^F)IRF_{\infty} = (I - F)D \tag{2-35}$$

これにより、構造パラメータ A^{-1} を得ることができた。このように、長期のインパルス応答関数に制約を課すことで、再帰的制約と同様に誘導形VARのパラメータから構造VARのパラメータを復元できる。

2.6. より一般的な識別制約 (Rubio-Ramirez et al.(2010))

前節までで明らかになったことが2つある。1つは、識別制約として三角行列を仮定することが重要であることである。もう1点は、短期または長期のインパルス応答関数に制約を課すことで構造パラメータの識別ができることである。そのため、次に自然に考えられるのは、三角行列以外の識別のかけ方で構造パラメータを復元できないか、及び、短期と長期のインパルス応答関数に同時に制約をかけられないかということであろう。

Rubio-Ramirez et al. (2010) は、三角行列以外の制約のかけ方で短・長期双方のインパルス応答関数に同時に制約をかけて誘導形VARから構造VARを復元する方法を開発した。以下では、その概要について述べる。

Rothenberg (1971) に従って、二組の構造VARパラメータ (A_0, A_+) と $(\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_+)$ がまったく同一の内生変数 Y_t の条件付き分布を生成することを *observationally equivalent* と定義する。標準的なVARモデル(線形ガウシアン)では、二組の構造VARパラメータ (A_0, A_+) と $(\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_+)$ が *observationally equivalent* であるのは、この二組の構造形パラメータが同一の誘導形表現 (F, Σ_u) を持つことである。構造VARパラメータ (A_0, A_+) と $(\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_+)$ が同一の誘導形表現を持つ場合、 $A_0 = \widetilde{A}_0P$ かつ $A_+ = \widetilde{A}_+P$ を満たす直交行列(回転行列) P が存在する。Rubio-Ramirez et al. (2010) では、構造パラメータの大域的識別と局所的識別を以下のように定義している。

2.1 定義(大域的識別) パラメータ (A_0, A_+) が大域的に識別されている必要十分条件は、*observationally equivalent* な他のパラメータが存在しないことである。

2.2 定義(局所的識別) パラメータ $(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_+)$ が局所的に識別されている必要十分条件は、 $(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_+)$ 周辺の開近傍が *observationally equivalent* な他のパラメータを含まないことである。

つまり、識別ができていないかチェックするには、 $\mathbf{A}_0 = \widetilde{\mathbf{A}}_0 \mathbf{P}$ かつ $\mathbf{A}_+ = \widetilde{\mathbf{A}}_+ \mathbf{P}$ を満たすような直交行列 \mathbf{P} が存在するかどうか重要になる。次に、識別制約を考える。構造パラメータ $(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_+)$ が識別制約を満たすとは、下記の式を満たすことであると論文中では定義されている。

$$\underbrace{\mathbf{Q}_j}_{k \times k} \underbrace{f(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_+)}_{k \times n} \underbrace{\mathbf{e}_j}_{n \times n} = 0 \quad (2-36)$$

$f(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_+)$ は構造パラメータの変換である。例えば、前節の長期制約の例では、以下のような関数形を想定していたことになる。

$$f(\mathbf{A}) = (\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \mathbf{R} \mathbf{F}_\infty \quad (2-37)$$

\mathbf{Q}_j は変換された構造パラメータに課せられた線形制約であり、 \mathbf{e}_j は $n \times n$ 単位行列 \mathbf{I} の第 j 列である。この識別制約式を用いて制約された構造パラメータの集合を定義しよう。

2.3 定義(制約された構造パラメータの集合)

$$R = \{(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_+) \in U \cap N \mid \mathbf{Q}_j f(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_+) \mathbf{e}_j = 0 \text{ for } 1 \leq j \leq n\} \quad (2-38)$$

ここで、 U は制約されていない構造パラメータの集合であり、 N は正規化された構造パラメータの集合である。

2.4 定義(Exact Identification) R によって制約を表現されたある構造 VAR を考える。任意の誘導形 VAR のパラメータ (\mathbf{F}, Σ_u) に対し、 $g(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_+) = (\mathbf{F}, \Sigma_u)$ を満たす一意の構造パラメータ $(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_+) \in R$ が存在する場合、この構造 VAR は *exactly identified* されているという。

Exact Identification に関する定理が論文中の定理 5 である。

2.1 定理(Theorem 5) R によって制約を表現されたある構造 VAR を考える。任意の構造パラメータ $(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_+) \in U$ に対し、 $(\mathbf{A}_0 \mathbf{P}, \mathbf{A}_+ \mathbf{P}) \in R$ を満たす一意の直交行列 (回転行列) $\mathbf{P} \in O(n)$ が存在する場合、この構造 VAR は *exactly identified* されている。ここで、 $O(n)$ は $n \times n$ の全ての直交行列の集合である。この定理 5 より、ある条件を満たす一意の直交行列 \mathbf{P} を見つけ出すことができれば、構造 VAR を *exactly identify* できることがわかった。この直交行列 \mathbf{P} を見つけ出すことは容易ではないが、Rubio-Ramirez al. (2010) はこの \mathbf{P} を簡単に生成するアルゴリズムを開発している。それについて解説する前に、大域的識別に関する主要な定理である定理 6 と 7 について述べる。

2.2 定理(Theorem 6) Admissible¹⁹かつ strongly regular な \mathbf{R} によって制約を表現されたある構造 VAR を考える。以下の必要条件と十分条件を同時に満たすとき、構造 VAR は exactly identified されている。

必要条件

$$\sum_{j=1}^n q_j = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{where } q_j \equiv \text{rank}(Q_j) \quad (2-39)$$

十分条件

$$\text{rank}(\mathbf{M}_j(\mathbf{f}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_+))) = n \quad (2-40)$$

$$\mathbf{M}_j(\mathbf{f}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_+)) \equiv \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{Q}_j}_{k \times k} & \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_+)}_{k \times n} \\ \underbrace{\mathbf{I}}_{j \times j} & \underbrace{\mathbf{0}}_{j \times (n-j)} \end{bmatrix} \quad (2-41)$$

ここで n は内生変数の数であり、 $\frac{n(n-1)}{2}$ は識別に必要な制約の数である。

2.3 定理(Theorem 7) Admissible かつ strongly regular な \mathbf{R} によって制約を表現されたある構造 VAR を考える。この構造 VAR は、 $q_j = n^j$ for $1 \leq j \leq n$ を満たすとき exactly identified されている。

この定理 7 を満たすように \mathbf{Q}_j を作成する。その上で次のアルゴリズムに従うことで定理 5 を満たす一意の直交行列 \mathbf{P} を生成することができる。

アルゴリズム

STEP1 $j=1$

STEP2 下記の定義に従い行列 $\tilde{\mathbf{Q}}$ を作成する。ただし、 $j=1$ の場合 $\tilde{\mathbf{Q}}_j = \mathbf{Q}_j \mathbf{f}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_+)$ とする。

$$\tilde{\mathbf{Q}}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_j \mathbf{f}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_+) \\ \mathbf{P}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}'_{j-1} \end{bmatrix} \quad (2-42)$$

STEP3 $\text{rank}(\mathbf{Q}_j) = n - j$ であるため、 $\tilde{\mathbf{Q}}_j \mathbf{P}'_j = \mathbf{0}$ を満たすようなある単位ベクトルある単位ベクトル \mathbf{P}_j が存在する。ゆえに、 $\text{rank}(\tilde{\mathbf{Q}}_j) < n$ である。 $\tilde{\mathbf{Q}}_j$ を LU 分解することで \mathbf{P}_j を得る。

STEP4 $j = n$ ならアルゴリズムを停止する。そうでなければ、 $j = j + 1$ として STEP2 に戻る。

STEP5 $\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_n]$ より直交行列 \mathbf{P} を作成する。

これにより、構造パラメータの識別に必要な \mathbf{P} が得られた。次節では、このアルゴリズムを実

¹⁹ 構造パラメータの変換関数が $f(\mathbf{A}_0 \mathbf{P}, \mathbf{A}_+ \mathbf{P}) = f(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_+) \mathbf{P}$ を満たすこと

行して直交行列 P を作成し、推定した誘導形パラメータから構造 VAR を復元してインパルス応答を描写する。

2.7. VAR による公共投資の乗数効果測定

本節では、前節で紹介した各種識別制約を用いて構造 VAR を推定し、公共投資の乗数効果を定量化する。使用するデータは以下の通りである。データは四半期ベースで短期金利と 15 歳以上人口以外は季節調整値を使用する。また、サンプル期間は 1980 年第 2 四半期から 2017 年第 1 四半期までである。

名称	記号	出所	詳細
GDP	Y_t^{act}	SNA	実質国内総生産
家計消費	C_t^{act}	SNA	実質家計消費
政府投資	$G_t^{i,act}$	SNA	実質公的資本形成
(15 歳以上人口)	N_t^{act}	総務省	—

2.7.1. コレスキー分解を用いた識別制約と財政乗数

推定する構造 VAR の誘導形表現は以下の通りである。

$$X_t = F_0 + \sum_{k=1}^l F_k X_{t-k} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \Sigma_u) \quad (2-43)$$

$$X_t = \begin{pmatrix} \Delta \ln \left(\frac{G_t^{i,act}}{N_t^{act}} \right) \\ \Delta \ln \left(\frac{C_t^{act}}{N_t^{act}} \right) \\ \Delta \ln \left(\frac{Y_t^{act}}{N_t^{act}} \right) \end{pmatrix} \quad (2-44)$$

今回の推計では、公共投資、消費、GDP の順に外生性が高いと仮定している。これは、ある期の公共投資の支出額を決める上で参考にする GDP や消費等のデータは、その時点では過去の情報であり、従って当期の GDP や消費等の観察不可能な集計データは公共投資支出額の意味決定に同時点間で影響し得ない、という事実を利用した識別条件である。この識別条件を満たすために、一番上の推計式に公共投資を、二番目と三番目の推計式に消費と GDP を配置し、復元する構造パラメータは下三角行列であることを仮定する。また、ラグは 1 期($l=1$) と 4 期($l=4$) の場合に分けて推定を行う。

k 期の乗数は累積乗数として以下のように定義した：

$$\text{(総生産の)財政乗数} = \frac{\sum_{t=1}^k \Delta y_t}{\sum_{t=1}^k \Delta g_t} \frac{1}{y} \quad (2-45)$$

$$\text{消費の財政乗数} = \frac{\sum_{t=1}^k \Delta c_t}{\sum_{t=1}^k \Delta g_t} \frac{1}{c} \quad (2-46)$$

ただし、 $g_t^i = \ln(G_t^{i,act}/N_t^{act})$, $y_t = \ln(Y_t^{act}/N_t^{act})$, $c_t = \ln(C_t^{act}/N_t^{act})$ であり、サンプル期間の平均から $\overline{g^i/y} = 0.0693$, $\overline{g^i/c} = 0.1262$ を設定した。

得られた結果は次の通りである。表 2-1 はラグが 1 期の場合の VAR モデルのパラメータ（係数）の推定結果である（ラグ 4 期の場合の推定結果は省略）。図 2-1 は推定されたパラメータを利用して描写した政府投資ショックに対する各内生変数のインパルス応答である。図 2-1 から、公共投資の増加は消費のクラウドインを発生させ、GDP にも有意に正の影響を与えていることが確認できる。また、表 2-2 はラグ別の累積乗数である。ラグ数を長く取ると、公共投資ショックの影響が持続的になり、累積の乗数も高くなる。

表 2-1 VAR（コレスキー分解）のパラメータ推計結果

被説明変数:GI				
説明変数	推計値	標準誤差	t値	p値
DLOG_GI[-1]	0.0007	0.08	0.01	0.99
DLOG_C[-1]	0.1257	0.38	0.33	0.74
DLOG_Y[-1]	-0.1976	0.38	-0.52	0.60
(定数項)	-0.0017	0.00	-0.55	0.58
被説明変数:C				
DLOG_GI[-1]	0.0353	0.02	1.49	0.14
DLOG_C[-1]	-0.1830	0.11	-1.70	0.09
DLOG_Y[-1]	0.0899	0.11	0.84	0.40
(定数項)	0.0029	0.00	3.28	0.00
被説明変数:Y				
DLOG_GI[-1]	0.0160	0.02	0.66	0.51
DLOG_C[-1]	0.0115	0.11	0.10	0.92
DLOG_Y[-1]	0.0541	0.11	0.50	0.62
(定数項)	0.0034	0.00	3.69	0.00

図 2-1 政府投資ショックに対する各内生変数のインパルス応答

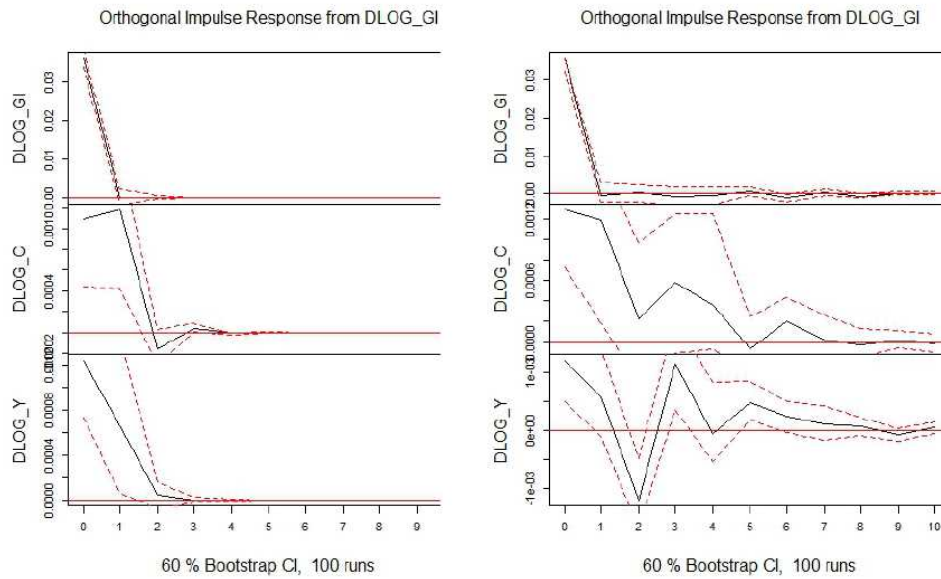


表 2-2 ラグ別の政府支出に対する累積乗数

	1四半期	4四半期	8四半期	12四半期	20四半期	ピーク
ラグ1						
GDP	0.4975	0.7820	0.7820	0.7820	0.7820	0.7820
消費	0.2401	0.4738	0.4724	0.4724	0.4724	0.5015
ラグ4						
GDP	0.4851	0.7112	1.0341	1.0404	1.0435	1.0834
消費	0.2851	0.7435	0.8744	0.8810	0.8798	0.8866

コレスキー分解による識別では、消費と GDP の外生性の順序について仮定するの必要があった。次節では、Rubio-Ramirez et al. (2010) のアルゴリズムを利用して、消費と GDP の外生性の順序に仮定を置かずに構造 VAR を識別して公共投資ショックの影響を考察する。

2.7.2. Rubio-Ramirez et al. (2010) の方法を用いた識別制約と財政乗数

本節では、Rubio-Ramirez et al. (2010) を参考にして構造 VAR の識別を行う。推定に利用しているデータとモデルのラグ数はコレスキー分解のケースと同様である。今回利用する識別条件は以下の通りである。

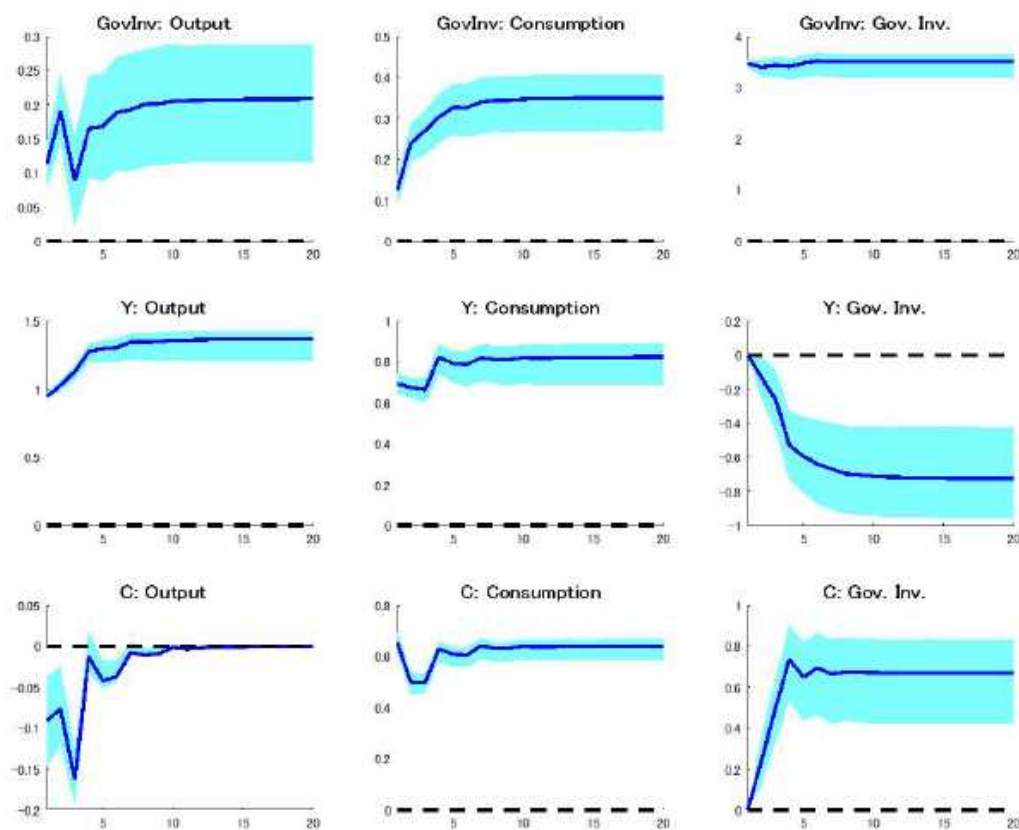
$$f(A_0, A_+) = \begin{pmatrix} IRF_0 \\ IRF_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \ln(C_t^{act}/N_t^{act}) \\ \Delta \ln(Y_t^{act}/N_t^{act}) \\ \Delta \ln(G_t^{i,act}/N_t^{act}) \\ \Delta \ln(C_t^{act}/N_t^{act}) \\ \Delta \ln(Y_t^{act}/N_t^{act}) \\ \Delta \ln(G_t^{act}/N_t^{act}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_C & \varepsilon_Y & \varepsilon_{GI} \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \quad (2-47)$$

この識別条件では、公共投資は当期の GDP と消費の影響を受けないと仮定されている。ここまではコレスキー分解のケースと同様であるが、今回の識別条件では消費の方が GDP よりも外生性が高いという仮定の代わりに、消費の構造ショックは長期の消費に影響を与えないという仮

定を利用している。

図 2-2 の 1 段目は、公共投資ショックに対する各内生変数のインパルス応答関数である。このインパルス応答から、コレスキー分解と同様に、公共投資は消費と GDP を有意に押し上げていることが分かる。

図 2-2 VAR (Rubio-Ramirez et al (2010)による識別制約) に基づくインパルス応答関数



今回、VAR モデルでは、公共投資の政策効果を 2 つの異なる識別方法を用いて分析した。いずれの識別制約でも、公共投資は消費のクラウドインを発生させ、GDP を押し上げる効果があることが示唆された。一般に、標準的なリアルビジネスサイクルモデルやニューケインジアンモデルには、政府支出ショックに対して消費はクラウドイングアウトするという性質がある。一方で、今回の分析結果を含め、VAR では政府支出ショックに対して消費はクラウドインすることが多くの実証研究によって報告されている。

3章 DSGE モデルの構築

3.1. 標準的なモデル

本章では財政政策の効果を分析するための DSGE モデルの構築を行う。具体的には、標準的な DSGE モデルを設定し、続く節で財政政策パズルを考慮するためのモデルの変更を加えていく。まず本節では、本研究全体の基礎的なモデルとなる標準的な DSGE モデルを構築する。近年、F R B、I M F、日本銀行などの機関で標準的な分析ツールとなっているニューケインジアンモデルに分類されるもので、①家計の異時点間の最適化行動の反映、②独占的競争モデル・硬直価格モデルによるインフレ率の内生化²⁰、③テイラールールなどによる金融政策の内生化²¹、等を行っている。なお、硬直価格モデルとしては、Rotemberg 型とした²²。

家計

家計は消費財(C_t)と1期間の無リスク資産(B_t)を購入し、労働力(l_t)の供給を行う。具体的には以下の効用関数(経済が均斉成長経路に収束するために必要な CRRA 型²³)を最大化する(無限期間(生涯)における効用の割引現在価値の最大化)。

$$\max E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{t+s} U(X_{t+s}, l_{t+s}) = \max E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{t+s} \left(\frac{z_t^c X_{t+s}^{1-\sigma^c}}{1-\sigma^c} - A^l \frac{z_t^l l_{t+s}^{1+\eta^l}}{1+\eta^l} \right) \quad (3-1)$$

$$X_t = C_t - \theta^c C_{t-1} \quad (3-2)$$

$\beta \in (0,1)$ は主観的割引因子、 $\sigma^c > 0$ は相対的リスク回避度である。 η^l は労働供給弾性値の逆数、 A^l は消費と労働の間の調整因子である。 θ^c は消費の習慣形成の強度を示すパラメータである。

z^x 、 $x \in \{c, l, i\}$ は理論値からの乖離であり、その自然対数は以下の一次の自己回帰過程に従う。

$$\ln(z_t^x) = \rho^x \ln(z_{t-1}^x) + \varepsilon_t^x \quad (3-3)$$

ε_t^x は每期ランダムに生じる確率的ショック項である。 ρ^x はショックの持続性に関するパラメー

²⁰ 企業が互いに差別化された財を生産しており、自らの利潤を最大化するように価格決定できる市場において、企業が何らかの要因により価格決定が制約されているとの仮定により、一般物価の変動を内生化したもの。価格決定の制約のかけ方には Calvo タイプや Rotemberg タイプなどがあるが、このように内生化したインフレ率は、現実にもみられる物価変動の粘着性、つまり物価が急激には変化しないという性質を備えている。

²¹ 物価や経済成長の安定化を目的として、マクロ経済の変動に応じて機械的に金融政策ツールとしての名目金利が決定されること。金融政策ルールは必ずしも機械的に決定される必要はなく、物価や経済成長の安定度を指標化し、その指標が最大化されるように金融政策がなされると仮定することもできるが(最適金融政策)、特に実証分析に用いるニューケインジアンモデルではテイラールールにより金融政策が決定されていると仮定することが多い。

²² 価格の硬直性のモデルとしては Calvo 型か Rotemberg 型がポピュラーであり、どちらも基本的な結論は同じである。本研究では、3.5 節で deep habits (消費の習慣形成) をモデルに導入するが、標準的な DSGE モデルに deep habits を組み込んだ Cantore et al.(2012)が Rotemberg 型を採用しており、deep habits のスムーズな導入を見据えて、本研究においても Rotemberg 型を採用した。

²³ 相対的危険回避度一定 (constant relative risk aversion) の略。経済が均斉成長経路に収束するために必要な関数形であり、標準的に採用されている (ローマー(2010)などを参照)

タである。つまり z_t^c, z_t^l はそれぞれ消費と労働の効用の乖離項を意味する。この乖離項を含めることで、各変数はランダムなショック (ε_t^x) が生じなくても、一定の割合で成長する (均斉成長)。

代表的家計²⁴の予算制約を以下のように設定する。

$$C_t + I_t + \frac{B_t}{P_t} = \frac{W_t}{P_t} l_t + R_t^k K_{t-1} + \frac{R_{t-1} B_{t-1}}{P_t} + \int_0^1 J_{it} di - T_t \quad (3-4)$$

$$K_t = (1 - \delta) K_{t-1} + z_t^i \left[1 - S \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right] I_t \quad (3-5)$$

$$S \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) = \frac{1}{2} \left[\exp \left(\chi \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1 \right) \right) + \exp \left(-\chi \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1 \right) \right) - 2 \right] \quad (3-6)$$

ここで、 I_t は企業投資、 K_t は資本、 W_t は名目賃金、 R_t^k は資本財の名目リターン、 R_t は無リスク資産の名目リターン、 J_{it} は企業利潤、 T_t は一括税、 δ は減価償却率、 P_t は物価水準、 z_t^i は投資の乖離項である。 $S \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right)$ は t 期の投資量に対して逡増的に増加する費用関数であり、調整コストと呼ばれる (この調整コストが存在するために、企業は瞬時に資本ストックを増加・減少させることができない)。 χ は投資の調整コストのパラメータである。

家計は(3-4)の予算制約の下で効用関数(3-1)を最大化する以下のような条件付き最大化問題 (ラグランジアン) を解く (λ_t 、 q_t はラグランジュ乗数)。

$$\mathcal{L} = \sum_{s=0}^{\infty} E_t \beta^{t+s} \left[\begin{aligned} & \left\{ \frac{z_t^c (C_{t+s} - \theta^c C_{t-1})^{1-\sigma^c}}{1-\sigma^c} - A^l \frac{z_t^l l_{t+s}^{1+\eta^l}}{1+\eta^l} \right\} \\ & + \lambda_{t+s} \left\{ \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} l_{t+s} + R_{t+s}^k K_{t+s-1} + \frac{R_{t+s-1} B_{t+s-1}}{P_{t+s-1}} \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 J_{it+s-1} di - T_{t+s} - C_{t+s} - I_{t+s} - \frac{B_{t+s}}{P_{t+s}} \right\} \\ & + q_{t+s} \left\{ (1 - \delta) K_{t+s-1} + z_t^i \left(1 - S \left(\frac{I_{t+s}}{I_{t+s-1}} \right) \right) I_{t+s} - K_{t+s} \right\} \end{aligned} \right] \quad (3-7)$$

消費、労働供給、投資、資本ストック、無リスク資産についての一階の条件はそれぞれ以下のとおりである。

$$\partial C_t: \frac{1}{z_t^c (C_t - \theta^c C_{t-1})^{\sigma^c}} - \lambda_t = 0 \quad (3-8)$$

$$\partial l_t: \lambda_t \frac{W_t}{P_t} - A^l z_t^l l_t^{\eta^l} = 0 \quad (3-9)$$

²⁴ ここでは、経済には代表的家計と呼ばれる一つの家計が存在し、家計に関するあらゆる意思決定を行っているという仮定をおいている。

$$\partial I_t: \beta E_t \left[z_{t+1}^i q_{t+1} S' \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right) \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right)^2 \right] + z_t^i q_t \left[1 - S \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) - S' \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right] - \lambda_t = 0 \quad (3-10)$$

$$\partial K_t: \beta E_t [R_{t+1}^k \lambda_{t+1}] + \beta(1 - \delta) E_t [q_{t+1}] - q_t = 0 \quad (3-11)$$

$$\partial B_t: \beta R_t E_t \left[\frac{\lambda_{t+1}}{\pi_{t+1}} \right] - \lambda_t = 0 \quad (3-12)$$

また、以下の確率的割引因子 $D_{t,t+s}$ を定義する。

$$D_{t,t+s} = \beta^s \frac{E_t[\lambda_{t+s}]}{\lambda_t} \quad (3-13)$$

特に $s = 1$ のとき、(3-12)より

$$D_{t,t+1} = \beta \frac{E_t[\lambda_{t+1}]}{\lambda_t} = \frac{E_t[\pi_{t+1}]}{R_t} \quad (3-14)$$

となる。

企業

企業部門には最終財生産企業と中間財生産企業の2種類が存在すると仮定する。最終財生産企業は中間財生産企業から中間財を購入して最終財を生産する。具体的には以下のようなCES型生産関数の下で生産を行う。

$$Y_t = \left\{ \int_0^1 Y_{it}^{\frac{\eta-1}{\eta}} di \right\}^{\frac{\eta}{\eta-1}} \quad (3-15)$$

最終財生産企業はこの生産関数を制約条件として以下の利潤最大化問題を解く。

$$\max_{Y_{it}} P_t Y_t - \int_0^1 P_{it} Y_{it} di \quad (3-16)$$

$$s.t. Y_t = \left\{ \int_0^1 Y_{it}^{\frac{\eta-1}{\eta}} di \right\}^{\frac{\eta}{\eta-1}} \quad (3-17)$$

(3-17)を(3-16)に代入して、

$$\max_{Y_{it}} P_t \left\{ \int_0^1 Y_{it}^{\frac{\eta-1}{\eta}} di \right\}^{\frac{\eta}{\eta-1}} - \int_0^1 P_{it} Y_{it} di \quad (3-18)$$

を得る。中間財 Y_{it} に対する一階の条件を求めると、

$$\partial Y_{it}: P_t \left\{ \int_0^1 Y_{it}^{\frac{\eta-1}{\eta}} di \right\}^{\frac{1}{\eta-1}} Y_{it}^{-\frac{1}{\eta}} = P_{it} \quad (3-19)$$

ここで、 $\left\{ \int_0^1 Y_{it}^{\frac{\eta-1}{\eta}} di \right\}^{\frac{1}{\eta-1}} = Y_t^{\frac{1}{\eta}}$ であることから、中間財需要関数を得る：

$$P_t Y_t^{\frac{1}{\eta}} Y_{it}^{-\frac{1}{\eta}} = P_{it} \Leftrightarrow Y_{it} = \left(\frac{P_{it}}{P_t} \right)^{-\eta} Y_t \text{ (中間財需要関数)} \quad (3-20)$$

ここで得られた中間財需要関数を最終財生産関数(3-15)に代入して以下を得る。

$$P_t = \left[\int_0^1 P_{it}^{1-\eta} di \right]^{\frac{1}{1-\eta}} \quad (3-21)$$

最終財市場は完全競争であると仮定する。したがって、家計の予算制約には最終財企業の利潤は現れない。家計の予算制約にある企業利潤($\int_0^1 J_{it} di$)は中間財企業のものである。

一方、中間財市場は独占的競争²⁵が仮定されており、中間財の種類ごとに超過利潤が発生している。中間財企業の生産関数(一次同次のコブ＝ダグラス型)は以下のとおりである。

$$Y_{it} = a_t K_{it-1}^\alpha l_{it}^{1-\alpha} - \bar{\Psi} \quad (3-22)$$

$$\ln(a_t) = \rho^z \ln(a_{t-1}) + \varepsilon_t^\alpha \quad (3-23)$$

Y_{it} は中間財、 A_t は技術水準、 ε_t^α は技術ショック(生産性ショック)、 α は資本分配率、 $\bar{\Psi}$ は固定費用である。中間財市場は独占的競争なので、中間財生産企業は中間財価格 P_{it} を調整することで利潤最大化を行う。

独占的競争の仮定に加えて、中間財生産企業は Rotemberg(1982)の逡増型の価格調整費用に直面していると仮定する。具体的には以下のとおり。

$$\frac{\xi}{2} \left(\frac{P_{it}}{P_{it-1}} - 1 \right)^2 Y_t \quad (3-24)$$

ξ は価格硬直性の程度であり、Rotemberg パラメータと呼ばれる。 $\xi = 0$ ならば、名目硬直性は存在せず価格は完全に伸縮的(価格調整の費用はゼロ)である。Rotemberg パラメータが大きくなると価格調整はより緩やかに行われる。 $\xi > 0$ の場合、価格は粘着的(Sticky price)である。

中間財企業は以下の無限期間における(現在価値に割り引いた)期待利潤を最大化する。

²⁵ 差別化された財を独占的に生産する企業が多数存在し、自社が生産する財に対してはそれぞれ価格支配力をもつ一方で、(互いに代替財である)他の財を生産する企業と競争するような市場環境。

$$J_{it} = E_t \sum_{s=0}^{\infty} D_{t,t+s} \left[\frac{P_{it+s}}{P_{t+s}} Y_{it+s} - \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} l_{it+s} - R_{t+s}^k K_{it-1+s} - \frac{\xi}{2} \left(\frac{P_{it+s}}{P_{it-1+s}} - 1 \right)^2 Y_{t+s} \right] \quad (3-25)$$

すなわち、実質の売上 $\frac{P_{it+s}}{P_{t+s}} Y_{it+s}$ から要素費用 $\frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} l_{it+s} + R_{t+s} K_{it-1+s}$ と価格調整費用 $\frac{\xi}{2} \left(\frac{P_{it+s}}{P_{it-1+s}} - 1 \right)^2 Y_{t+s}$ を差し引いたものが当期の利潤であり、それを割引因子 $D_{t,t+s}$ で割り引いた現在価値が利潤となる。

中間財生産企業は、労働量 l_{it} 、資本 K_{it-1} （家計からレンタルする）を任意に変更できるだけでなく、差別的な財を生産する独占的競争下にあるため、毎期の中間財価格 P_{it} も自由に決定できる。価格に応じて需要量も変化するが、それを表す中間財需要関数(3-20)式を代入し、制約条件である生産関数(3-22)式のラグランジュ乗数を φ_t とすると、ラグランジアンは以下のように定義できる。

$$\mathcal{L} = E_t \sum_{s=0}^{\infty} D_{t,t+s} \left[\frac{P_{it+s}}{P_{t+s}} \left(\frac{P_{it+s}}{P_{t+s}} \right)^{-\eta} Y_{t+s} - \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} l_{it+s} - R_{t+s}^k K_{it-1+s} - \frac{\xi}{2} \left(\frac{P_{it+2}}{P_{it-1+s}} - 1 \right)^2 Y_{t+s} \right. \\ \left. + \varphi_{t+s} \left(a_t K_{it-1+s}^\alpha l_{it+s}^{1-\alpha} - \bar{Y} - \left(\frac{P_{it+s}}{P_{t+s}} \right)^{-\eta} Y_{t+s} \right) \right] \quad (3-26)$$

中間財価格、労働投入量、資本投入量に対する一階の条件は以下のとおりである。

$$\partial P_{it}: \xi E_t [D_{t,t+1} \pi_{t+1} (\pi_{t+1} - 1) Y_{t+1}] - \xi \pi_t (\pi_t - 1) Y_t + (\eta \varphi_t - \eta + 1) Y_t = 0 \quad (3-27)$$

$$\partial l_{it}: (1 - \alpha) \varphi_t a_t \left(\frac{l_t}{K_{t-1}} \right)^{-\alpha} - W_t^r = 0 \quad (3-28)$$

$$\partial K_{it-1}: \alpha \varphi_t a_t \left(\frac{l_t}{K_{t-1}} \right)^{1-\alpha} - R_t^k = 0 \quad (3-29)$$

ただし、ここではすべての中間財生産企業は同一の行動をとるので、同質性条件 $P_{it} = P_t$ 、 $l_{it} = l_t$ 、 $K_{it} = K_t$ を用いている。また、 $\pi_t \equiv P_t/P_{t-1}$ である。

政府・中央銀行

政府は以下の財政支出ルールに基づいて財政政策を行うと仮定する。

$$\ln \left(\frac{G_t}{g^y \bar{Y}} \right) = \rho^g \ln \left(\frac{G_{t-1}}{g^y \bar{Y}} \right) + \varepsilon_t^g \quad (3-30)$$

ここで、 g^y は名目 GDP に対する政府支出比率であり、 ρ^g は財政政策ルールパラメータ、 ε_t^g は政府支出ショックである。

また、中央銀行はテイラールール²⁶に基づいて名目金利を設定すると仮定する。

$$\ln\left(\frac{R_t}{\bar{R}}\right) = \rho^r \ln\left(\frac{R_{t-1}}{\bar{R}}\right) + (1 - \rho^r) \left[(1 + \psi_\pi \ln(\pi_t) + \psi_y \ln\left(\frac{Y_t}{a_t \bar{Y}}\right)) \right] + \varepsilon_t^r \quad (3-31)$$

ρ^r は金利スムージングパラメータ、 ρ_π と ρ_y はインフレーションと GDP の定常状態からの乖離に関する反応係数、 ε_t^r は金融政策ショックである。ここで中央銀行の政策目標とされるインフレ率 (π_t^*) はゼロ、潜在成長率は \bar{Y} と設定している。

財市場の均衡

財市場の均衡式は以下のように与えられる。

$$Y_t = C_t + I_t + G_t + \frac{\xi}{2} (\pi_t - 1)^2 Y_t \quad (3-32)$$

右辺最後の項は(3-24)の価格調整コストである。

以上の設定で構成される DSGE モデルを「標準的な」DSGE モデルとする。内生変数は表 <参考文献>3-1 に示す 18 個であり、対応する方程式は(3-5)、(3-8)、(3-9)、(3-10)、(3-11)、(3-12)、(3-13)、(3-22)、(3-23)、(3-27)、(3-28)、(3-29)、(3-30)、(3-31)、(3-32)と z_t^c 、 z_t^l 、 z_t^i の遷移式 ((3-3)に対応) の 18 本である。また外生ショックは表 3-2 のとおりである。

²⁶ テイラールールは中央銀行の金利設定ルールの一つ。脚注 29 を参照。

表 <参考文献>3-1 内生変数の一覧

変数	定義
C_t	消費
L_t	労働
I_t	設備投資
G_t	政府支出
Y_t	GDP または財の生産量
K_t	資本
R_t^k	実質金利
W_t	実質賃金
π_t	インフレ率
R_t	名目金利
$D_{t,t+1}$	確率的割引因子
λ_t	ラグランジュ乗数 (消費の限界効用)
q_t	ラグランジュ乗数 (資本)
φ_t	ラグランジュ乗数 (限界費用)
a_t	技術水準
z_t^c	消費の効用の乖離項
z_t^l	労働の効用の乖離項
z_t^i	投資の乖離項

表 3-2 外生ショック一覧

変数	定義
ε_t^z	技術ショック
ε_t^g	政府支出ショック
ε_t^r	金融政策ショック
ε_t^c	消費選好ショック
ε_t^l	労働供給ショック
ε_t^i	投資ショック

3.2. 生産関数への社会資本の導入

本節では、前節で構築した標準モデルにおける企業の生産関数に社会資本を導入する。標準モデルと同様、企業部門には最終財生産企業と中間財生産企業の2種類が存在し、中間財生産企業の生産関数に、新たに社会資本を導入する。

最終財生産企業

はじめに、最終財生産企業は $j \in \{0, 1\}$ でインデックスされた中間財生産企業から中間財を購入して最終財を生産する。具体的には以下のような生産関数の下で生産を行う：

$$Y_t = \left\{ \int_0^1 Y_{jt}^{\frac{\eta-1}{\eta}} dj \right\}^{\frac{\eta}{\eta-1}} \quad (3-33)$$

最終財生産企業は、この生産関数を制約条件として以下の利潤最大化問題を解く：

$$\max_{Y_{jt}} P_t Y_t - \int_0^1 P_{jt} Y_{jt} dj \quad (3-34)$$

$$s. t. Y_t = \left\{ \int_0^1 Y_{jt}^{\frac{\eta-1}{\eta}} dj \right\}^{\frac{\eta}{\eta-1}} \quad (3-35)$$

Y_{jt} に対する一階の条件を求めることで中間財 (Y_{jt}) 需要関数を得る：

$$Y_{jt} = \left(\frac{P_{jt}}{P_t} \right)^{-\eta} Y_t \quad (3-36)$$

ここで得られた中間財需要関数を最終財生産関数(3-33)に代入して以下を得る：

$$P_t = \left[\int_0^1 P_{jt}^{1-\eta} dj \right]^{\frac{1}{1-\eta}} \quad (3-37)$$

最終財市場は完全競争であると仮定する。したがって、家計の予算制約には最終財企業の利潤は現れない。家計の予算制約にある企業利潤 ($\int_0^1 J_{jt} dj$) は中間財生産企業のものである。

中間財生産企業

中間財市場は、標準モデルと同様に独占的競争を仮定し、中間財の種類ごとに超過利潤が発生していると想定する。社会資本を導入した中間財企業の（一次同次のコブ=ダグラス型）生産関数は以下のとおりである：

$$Y_{j,t} = a_t K_{j,t-1}^\alpha (K_{t-1}^g)^{\alpha^g} (l_{j,t})^{1-\alpha-\alpha^g} - \bar{\psi} \quad (3-38)$$

$$\ln(a_t) = \rho^z \ln(a_{t-1}) + \varepsilon_t^a \quad (3-39)$$

Y_{jt} は中間財、 a_t は技術水準、 ε_t^z は生産性ショック、 α は資本分配率、 K_t^g は社会資本、 $\bar{\Psi}$ は固定費用である。中間財市場は独占的競争なので、中間財生産企業は中間財価格 P_{jt} を調整することで利潤最大化を行う。

社会資本の遷移式を以下のように定義する：

$$K_t^g = (1 - \delta^g)K_{t-1}^g + G_t^i \quad (3-40)$$

ここで G_t^i は政府投資である。

独占的競争の仮定に加えて、中間財生産企業は Rotemberg (1982) の逡増型の価格調整費用に直面していると仮定する。具体的には以下のような費用関数を仮定する：

$$\frac{\xi}{2} \left(\frac{P_{jt}}{P_{jt-1}} - 1 \right)^2 Y_t \quad (3-41)$$

ξ は価格硬直性の程度であり、Rotemberg パラメータである。 $\xi = 0$ ならば、名目硬直性は存在せず価格は完全伸縮的である。Rotemberg パラメータが大きくなると価格調整はより緩やかに行われる。 $\xi > 0$ の場合、価格は粘着的(Sticky price) となる点は標準モデルと同じである。

上記の仮定から、 $j \in \{0,1\}$ でインデックスされた中間財生産企業の利潤 J_{jt} は以下のように与えられる：

$$J_{jt} = E_t \sum_{s=0}^{\infty} D_{t,t+s} \left[\frac{P_{jt+s}}{P_{t+s}} Y_{jt+s} - \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} l_{jt+s} - R_{t+s}^k K_{jt-1+s} - \frac{\xi}{2} \left(\frac{P_{jt+s}}{P_{jt-1+s}} - 1 \right)^2 Y_t \right] \quad (3-42)$$

すなわち、実質の売上 $\frac{P_{jt+s}}{P_{t+s}} Y_{jt+s}$ から要素費用 $\frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} l_{jt+s} + R_{t+s}^k K_{jt-1+s}$ と価格調整費用 $\frac{\xi}{2} \left(\frac{P_{jt+s}}{P_{jt-1+s}} - 1 \right)^2 Y_{t+s}$ を差し引いたものが当期の利潤であり、それを割引因子 $D_{t,t+s}$ で割り引いた現在価値が利潤となる。

中間財生産企業は、労働量 l_{jt} 、資本 K_{jt-1} （家計からレンタルする）を任意に変更できるだけでなく、差別的な財を生産する独占的競争下にあるため、毎期の中間財価格 P_{jt} も自由に決定できる。価格に応じて需要量も変化するが、それを表す中間財需要関数(3-36)を代入し、制約条件である生産関数(3-38)のラグランジュ乗数を φ_t とすると、ラグランジアンは以下のように定義できる：

$$\mathcal{L} = E_t \sum_{s=0}^{\infty} D_{t,t+s} \left[\frac{P_{jt+s}}{P_{t+s}} \left(\frac{P_{jt+s}}{P_{t+s}} \right)^{-\eta} Y_{t+s} - \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} l_{jt+s} - R_{t+s}^k K_{jt-1+s} - \frac{\xi}{2} \left(\frac{P_{jt+s}}{P_{jt-1+s}} - 1 \right)^2 Y_{t+s} + \varphi_{t+s} \left\{ a_t K_{jt-1+s}^\alpha (K_{t-1+s}^g)^{\alpha^g} l_{jt+s}^{(1-\alpha-\alpha^g)} - \bar{\Psi} - \left(\frac{P_{jt+s}}{P_{t+s}} \right)^{-\eta} Y_{t+s} \right\} \right] \quad (3-43)$$

中間財価格、労働量、資本についての一階の条件は

$$\partial P_{jt}: \xi E_t [D_{t,t+1} \pi_{t+1} (\pi_{t+1} - 1) Y_{t+1}] - \xi \pi_t (\pi_t - 1) Y_t + (\eta \varphi_t - \eta + 1) Y_t = 0 \quad (3-44)$$

$$\partial l_{jt}: (1 - \alpha - \alpha^g) \varphi_t a_t \left(\frac{l_t}{K_{t-1}} \right)^{-\alpha} \left(\frac{l_t}{K_{t-1}^g} \right)^{-\alpha^g} - W_t^r = 0 \quad (3-45)$$

$$\partial K_{jt-1}: \alpha \varphi_t a_t \left(\frac{l_t}{K_{t-1}} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{l_t}{K_{t-1}^g} \right)^{-\alpha^g} - R_t^r = 0 \quad (3-46)$$

で与えられる。ただし、全ての中間財生産企業は同一の行動をとるので、同質性条件 $P_{jt} = P_t, l_{jt} = l_t, K_{jt} = K_t$ を最後に用いており、また $\pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$ である。

政府・中央銀行

政府・中央銀行の行動については、第1節で構築した標準的モデルを、政府投資と政府支出を分けるように修正する。

G_t^c, G_t^i をそれぞれ政府消費、政府投資として、政府は以下の財政支出ルールに基づいて財政政策を行うと仮定する：

$$\ln \left(\frac{G_t^c}{g_y^c Y_{ss}} \right) = \rho^{gc} \ln \left(\frac{G_{t-1}^c}{g_y^c Y_{ss}} \right) + \varepsilon_t^{gc} \quad (3-47)$$

$$\ln \left(\frac{G_t^i}{g_y^i Y_{ss}} \right) = \rho^{gi} \ln \left(\frac{G_{t-1}^i}{g_y^i Y_{ss}} \right) + \varepsilon_t^{gi} \quad (3-48)$$

ここで、 g_y^c, g_y^i はそれぞれ政府消費対名目 GDP 比率、政府投資対名目 GDP 比率である。政府の予算制約は以下を仮定する：

$$G_t^c + G_t^i = T_t \quad (3-49)$$

すなわち、政府は負債を持たず、毎期の支出に等しい一括税 T_t を家計から徴収する。

中央銀行はテイラールールに基づいて名目金利を設定すると仮定する：

$$\ln \left(\frac{R_t}{\bar{R}} \right) = \rho^r \ln \left(\frac{R_{t-1}}{\bar{R}} \right) + (1 - \rho^r) \left[(1 + \psi_\pi) \ln(\pi_t) + \psi_y \ln \left(\frac{Y_t}{a_t \bar{Y}} \right) \right] + \varepsilon_t^r \quad (3-50)$$

ρ^r は金利スムージングパラメータ、 ρ_π と ρ_y はインフレーションと GDP の定常状態からの乖離に対する反応係数である。

上記を踏まえ、財市場の均衡式は以下のように与えられる：

$$Y_t = C_t + I_t^0 + G_t^c + G_t^i + \frac{\xi}{2}(\pi_t - 1)^2 Y_t \quad (3-51)$$

右辺最後の項は式(3-41)の価格調整コストである。

以上のとおり、標準的な DSGE モデルに生産要素としての社会資本を導入した設定による DSGE モデルを本研究のベースラインモデルとする。ベースラインモデルを要約モデルしたものを表 3-3 に示す。またベースラインモデルの内生変数 (21 個) と外生ショック、パラメータをそれぞれ表 3-4、表 3-5、表 3-6 に示す。

表 3-3 ベースラインモデルの要約モデル

■ 家計部門

$$(3-8) \quad \frac{1}{z_t^c (C_t - \theta^c C_{t-1})^{\sigma^c}} - \lambda_t = 0$$

$$(3-9) \quad \lambda_t \frac{W_t}{P_t} - A^l z_t^l l_t^{\eta^l} = 0$$

$$(3-10) \quad \beta E_t \left[z_{t+1}^i q_{t+1} S' \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right) \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right)^2 \right] + z_t^i q_t \left[1 - S \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) - S' \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right] - \lambda_t = 0$$

$$(3-11) \quad \beta E_t [R_{t+1}^k \lambda_{t+1}] + \beta(1 - \delta) E_t [q_{t+1}] - q_t = 0$$

$$(3-12) \quad \beta R_t E_t \left[\frac{\lambda_{t+1}}{\pi_{t+1}} \right] - \lambda_t = 0$$

■ 資本の遷移式

$$(3-5) \quad K_t = (1 - \delta) K_{t-1} + z_t^i \left[1 - S \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right] I_t$$

$$(3-40) \quad K_t^g = (1 - \delta^g) K_{t-1}^g + G_t^i$$

■ 確率的割引因子

$$(3-13) \quad D_{t,t+s} = \beta^s \frac{E_t [\lambda_{t+s}]}{\lambda_t}$$

■ 企業部門

$$(3-38) \quad Y_{j,t} = a_t K_{j,t-1}^\alpha (K_{t-1}^g)^{\alpha^g} (l_{j,t})^{1-\alpha-\alpha^g} - \bar{\psi}$$

$$(3-44) \quad \xi E_t [D_{t,t+1} \pi_{t+1} (\pi_{t+1} - 1) Y_{t+1}] - \xi \pi_t (\pi_t - 1) Y_t + (\eta \varphi_t - \eta + 1) Y_t = 0$$

$$(3-45) \quad (1 - \alpha - \alpha^g) \varphi_t a_t \left(\frac{l_t}{K_{t-1}} \right)^{-\alpha} \left(\frac{l_t}{K_{t-1}^g} \right)^{-\alpha^g} - W_t^r = 0$$

$$(3-46) \quad \alpha \varphi_t a_t \left(\frac{l_t}{K_{t-1}} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{l_t}{K_{t-1}^g} \right)^{-\alpha^g} - R_t^r = 0$$

■ 政府部門

$$(3-47) \quad \ln\left(\frac{G_t^c}{g_y^c Y_{SS}}\right) = \rho^{gc} \ln\left(\frac{G_{t-1}^c}{g_y^c Y_{SS}}\right) + \varepsilon_t^{gc}$$

$$(3-48) \quad \ln\left(\frac{G_t^i}{g_y^i Y_{SS}}\right) = \rho^{gi} \ln\left(\frac{G_{t-1}^i}{g_y^i Y_{SS}}\right) + \varepsilon_t^{gi}$$

$$(3-49) \quad G_t^c + G_t^i = T_t$$

■ 中央銀行

$$(3-50) \quad \ln\left(\frac{R_t}{\bar{R}}\right) = \rho^r \ln\left(\frac{R_{t-1}}{\bar{R}}\right) + (1 - \rho^r) \left[(1 + \psi_\pi) \ln(\pi_t) + \psi_y \ln\left(\frac{Y_t}{a_t \bar{Y}}\right) \right] + \varepsilon_t^r$$

■ 市場均衡式

$$(3-51) \quad Y_t = C_t + I_t^0 + G_t^c + G_t^i + \frac{\xi}{2} (\pi_t - 1)^2 Y_t$$

■ 各確率トレンド

$$(3-39) \quad \ln(a_t) = \rho^z \ln(a_{t-1}) + \varepsilon_t^a$$

$$(3-3) \quad \ln(z_t^c) = \rho^c \ln(z_{t-1}^c) + \varepsilon_t^c$$

$$(3-3) \quad \ln(z_t^l) = \rho^l \ln(z_{t-1}^l) + \varepsilon_t^l$$

$$(3-3) \quad \ln(z_t^i) = \rho^i \ln(z_{t-1}^i) + \varepsilon_t^i$$

表 3-4 内生変数一覧 (DSGE モデル : ベースラインモデル)

内生変数	定義
C_t	消費
l_t	労働
W_t	実質賃金
I_t	民間設備投資
G_t^i	政府投資
G_t^c	政府消費
K_t	民間資本
K_t^g	社会資本
R_t^k	実質金利
Π_t	インフレ率
R_t	名目金利
Y_t	GDP
$D_{t,t+1}$	確率的割引因子
λ_t	ラグランジュ乗数 (消費の限界効用)
q_t	ラグランジュ乗数 (資本)
ϕ_t	ラグランジュ乗数 (限界費用)
a_t	技術トレンド
T_t	税
z_t^c	消費の効用の乖離項
z_t^l	労働の効用の乖離項
z_t^i	投資の乖離項

表 3-5 外生ショック一覧 (DSGE モデル : ベースラインモデル)

外生ショック	定義
ε_t^a	技術ショック
$\varepsilon_t^{g^c}$	政府消費ショック
$\varepsilon_t^{g^i}$	政府投資ショック
ε_t^r	金融政策ショック
ε_t^c	消費選好ショック
ε_t^l	労働供給ショック
ε_t^i	投資ショック

表 3-6 パラメーター一覧 (DSGE モデル : ベースラインモデル)

パラメータ	定義
β	主観的割引因子
η^l	労働供給弾性値
A^l	労働供給のスケールパラメータ
α	所得の労働分配率
δ	民間資本減価償却率
χ	投資の調整コスト
η	中間財間の代替の弾性値
ξ	Rotemberg パラメータ
Φ_π	金利のインフレ感応度
Φ_Y	金利の GDP ギャップ感応度
ρ^r	金利スムージングパラメータ
ρ^μ	技術トレンドパラメータ
ρ^c	消費ショック持続性パラメータ
ρ^l	労働供給ショック持続性パラメータ
ρ^i	投資ショック持続性パラメータ
ρ^{g^i}	政府投資ショック持続性パラメータ
ρ^{g^c}	政府消費ショック持続性パラメータ
$\ln(a)$	定常状態技術水準
α^g	社会資本生産性
δ^g	社会資本減価償却率
g_y^c	政府消費対 GDP 比率
g_y^i	政府投資対 GDP 比率
ρ^{g^c}	政府消費ショック持続性パラメータ
ρ^{g^i}	政府投資ショック持続性パラメータ

3.3. 非リカーディアン家計(異時点間の最適化を行わない家計)の導入

本節では、前節までに構築したベースラインモデルにおいて、家計部門に標準的な異時点間最適化を行う主体 (optimizing households、リカーディアン家計) に加えて、異時点間最適化を行わない主体 (rule-of-thumb households) を導入する。

リカーディアン家計

リカーディアン家計は、標準的なニューケインジアンモデルの家計と同様に以下の効用関数²⁷を最大化する：

$$\max E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{t+s} U(C_{t+s}^o, l_{t+s}^o) = \max E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{t+s} \left(\frac{z_t^c (C_{t+s}^o - \theta^c \bar{C}_{t-1})^{1-\sigma^c}}{1-\sigma^c} - A^l \frac{z_t^l (l_{t+s}^o)^{1+\eta^l}}{1+\eta^l} \right) \quad (3-52)$$

C_t^o, l_t^o は、それぞれリカーディアン家計の消費と労働量である。基本的な形は標準モデルと同じだが、右肩に最適化を行う家計であることを示す添字 (o) が付記されている。また、 $\beta \in (0,1)$ は主観的割引因子、 η^l は労働供給弾性値の逆数、 A^l は消費と労働の間の調整因子である。

リカーディアン家計の予算制約は以下のとおりである：

$$C_t^o + I_t^o + \frac{B_t}{P_t} = \frac{W_t}{P_t} l_t^o + R_t^k K_{t-1}^o + \frac{R_{t-1} B_{t-1}}{P_t} + \int_0^1 J_{jt} dj - T_t \quad (3-53)$$

$$K_t^o = (1-\delta)K_{t-1}^o + z_t^i \left[1 - S\left(\frac{I_t^o}{I_{t-1}^o}\right) \right] I_t^o \quad (3-54)$$

$$S\left(\frac{I_t^o}{I_{t-1}^o}\right) = \frac{1}{2} \left(\exp\left(\chi\left(\frac{I_t^o}{I_{t-1}^o} - 1\right)\right) + \exp\left(-\chi\left(\frac{I_t^o}{I_{t-1}^o} - 1\right)\right) - 2 \right) \quad (3-55)$$

ここで、 I_t^o は企業投資、 K_t^o は資本、 W_t は名目賃金、 R_t^k は資本財の名目リターン、 R_t は無リスク資産の名目リターン、 J_{jt} は企業利潤、 T_t は一括税、 δ は減価償却率、 P_t は物価水準、 z_t^i は投資の乖離項である。 $S\left(\frac{I_t^o}{I_{t-1}^o}\right)$ は t 期の投資量に対して通増的に増加する費用関数であり、調整コストである。家計の予算制約についても標準モデルと同じであるが、右肩に最適化を行う家計であることを示す添字 (o) を付記し、最適化を行わない家計 (後述) との区別をする。

また、 z_t^c, z_t^l, z_t^i はそれぞれ消費、投資、労働量の理論値からの乖離であり、その自然対数は以下の一次の自己回帰過程に従う点も標準モデルと同じである：

$$\ln(z_t^x) = \rho^x \ln(z_{t-1}^x) + \varepsilon_t^x, \quad x \in \{c, l, i\} \quad (3-56)$$

²⁷ 3.1 節の標準的 DSGE モデルでは相対的危険回避度 $\sigma^c (> 0)$ が含まれる CRRA 型効用関数を設定したが、ここでは簡略化のため $\sigma^c \rightarrow 1$ の状況を想定している。このことで効用関数は $\ln C$ の形に簡略化することができ、モデルの検討がしやすくなる利点がある。またモデルの煩雑さを避けるため、ここでの主たる関心ではない消費の習慣形成による影響は無視できると仮定する。

ε_t^x は毎期ランダムに生じる確率的ショック項で、 ρ^x はショックの持続性に関するパラメータである。

家計は式(3-53)の予算制約の下で式(3-52)の効用関数を最大化する以下のような条件付最大化問題を解く：

$$\mathcal{L} = \sum_{s=0}^{\infty} E_t \beta^{t+s} \left[\begin{array}{l} \left\{ \frac{z_t^c (C_{t+s}^o - \theta^c \bar{C}_{t-1})^{1-\sigma^c}}{1-\sigma^c} - A^l \frac{z_t^l (l_{t+s}^o)^{1+\eta^l}}{1+\eta^l} \right\} \\ + \lambda_{t+s} \left\{ \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} l_{t+s}^o + R_{t+s}^K K_{t+s-1}^o + \frac{R_{t+s-1} B_{t+s-1}}{P_{t+s-1}} \right. \\ \left. + \int_0^1 J_{j,t+s} dj - T_{t+s} - C_{t+s}^o - I_{t+s}^o - \frac{B_{t+s}}{P_{t+s}} \right\} \\ + q_{t+s} \left\{ (1-\delta) K_{t+s-1}^o + z_t^i \left(1 - S \left(\frac{I_{t+s}^o}{I_{t+s-1}^o} \right) \right) I_{t+s}^o \right\} \end{array} \right] \quad (3-57)$$

消費、労働供給、投資、資本ストック、債券についての一階の条件はそれぞれ以下のとおり：

$$\partial C_t^o: \frac{1}{z_t^c (C_t^o - \theta^c \bar{C}_{t-1})^{\sigma^c}} - \lambda_t = 0 \quad (3-58)$$

$$\partial l_t^o: \lambda_t W_t^r - A^l z_t^l (l_t^o)^{\eta^l} = 0 \quad (3-59)$$

$$\partial I_t^o: \beta E_t \left[z_{t+1}^i q_{t+1} S' \left(\frac{I_{t+1}^o}{I_t^o} \right) \left(\frac{I_{t+1}^o}{I_t^o} \right)^2 \right] + z_t^i q_t \left[1 - S \left(\frac{I_t^o}{I_{t-1}^o} \right) - S' \left(\frac{I_t^o}{I_{t-1}^o} \right) \left(\frac{I_t^o}{I_{t-1}^o} \right) \right] - \lambda_t = 0 \quad (3-60)$$

$$\partial K_t^o: \beta E_t [R_{t+1}^K \lambda_{t+1}] + \beta(1-\delta) E_t [q_{t+1}] - q_t = 0 \quad (3-61)$$

$$\partial B_t: \beta R_t E_t \left[\frac{\lambda_{t+1}}{\pi_{t+1}} \right] - \lambda_t = 0 \quad (3-62)$$

標準モデルと同様、確率的割引因子 $D_{t,t+s}$ を以下のように定義する：

$$D_{t,t+s} = \beta^s \frac{E_t [\lambda_{t+s}]}{\lambda_t} \quad (3-63)$$

特に $s=1$ のとき、式(3-62)より、以下のように書き換えることができる。

$$D_{t,t+1} = \beta \frac{E_t [\lambda_{t+1}]}{\lambda_t} = \frac{E_t [\pi_{t+1}]}{R_t} \quad (3-64)$$

非リカーディアン家計

続いて、家計部門に標準的な異時点間最適化を行う主体に加えて、異時点間最適化を行わない

主体(rule-of-thumb households、非リカーディアン家計)を導入する。非リカーディアン家計は、投資を行わず、従って資本を持たず、労働所得から一括税 T_t を差し引いた量を消費する：

$$C_t^r = W_t l_t^r - T_t \quad (3-65)$$

労働量については、リカーディアン家計と同様の即時効用関数を仮定し、労働の限界不効用が消費の限界効用と等しくなる水準で決定される。消費と余暇の変数の右肩の添字 r は、異時点間の最適化を行わない家計であることを示す。

以上より、マクロの消費、労働量、投資、資本ストックは非リカーディアン家計の割合を λ として以下のように定義できる：

$$C_t = (1 - \lambda)C_t^o + \lambda C_t^r \quad (3-66)$$

$$l_t = (1 - \lambda)l_t^o + \lambda l_t^r \quad (3-67)$$

$$I_t = (1 - \lambda)I_t^o \quad (3-68)$$

$$K_t = (1 - \lambda)K_t^o \quad (3-69)$$

ここで、 C_t^r, C_t^o は1人当たりの消費として定義していることに注意する。他の変数についても同様である。

以下、企業、政府行動、中央銀行についてはベースラインモデルと同じである。非リカーディアンDSGEモデルの内生変数(24個)、外生ショックおよびパラメータの一覧を以下に掲載する。

表 3-7: 非リカーディアン家計モデルの要約モデル

■ 家計部門

$$(3-58) \quad \frac{1}{z_t^c (C_t^o - \theta_c \bar{C}_{t-1})^{\sigma_c}} - \lambda_t = 0$$

$$(3-59) \quad \lambda_t W_t^r - A^l z_t^l (l_t^o)^{\eta^l} = 0$$

$$(3-65) \quad C_t^r = W_t l_t^r - T_t$$

$$(FOCより) \quad \frac{W_t^r}{z_t^c (C_t^r - \theta_c \bar{C}_{t-1})^{\sigma_c}} - A^l z_t^l (l_t^r)^{\eta^l} = 0$$

$$(3-66) \quad C_t = (1 - \lambda)C_t^o + \lambda C_t^r$$

$$(3-67) \quad l_t = (1 - \lambda)l_t^o + \lambda l_t^r$$

$$(3-60) \quad \beta E_t \left[z_{t+1}^i q_{t+1} S' \left(\frac{I_{t+1}^o}{I_t^o} \right) \left(\frac{I_{t+1}^o}{I_t^o} \right)^2 \right] + z_t^i q_t \left[1 - S \left(\frac{I_t^o}{I_{t-1}^o} \right) - S' \left(\frac{I_t^o}{I_{t-1}^o} \right) \left(\frac{I_t^o}{I_{t-1}^o} \right) \right] - \lambda_t = 0$$

$$(3-61) \quad \beta E_t [R_{t+1}^k \lambda_{t+1}] + \beta(1 - \delta) E_t [q_{t+1}] - q_t = 0$$

$$(3-62) \quad \beta R_t E_t \left[\frac{\lambda_{t+1}}{\pi_{t+1}} \right] - \lambda_t = 0$$

■ 資本の遷移式

$$(3-54) \quad K_t^o = (1 - \delta)K_{t-1}^o + z_t^i \left[1 - S \left(\frac{I_t^o}{I_{t-1}^o} \right) \right] I_t^o$$

$$(3-40) \quad K_t^g = (1 - \delta^g)K_{t-1}^g + G_t^i$$

■ 確率的割引因子

$$(3-63) \quad D_{t,t+s} = \beta^s \frac{E_t[\lambda_{t+s}]}{\lambda_t}$$

■ 企業部門

$$(3-38) \quad Y_{j,t} = K_{j,t-1}^\alpha (K_{t-1}^g)^{\alpha^g} (a_t l_{j,t})^{1-\alpha-\alpha^g} - \bar{\Psi}$$

$$(3-44) \quad \xi E_t [D_{t,t+1} \pi_{t+1} (\pi_{t+1} - 1) Y_{t+1}] - \xi \pi_t (\pi_t - 1) Y_t + (\eta \varphi_t - \eta + 1) Y_t = 0$$

$$(3-45) \quad (1 - \alpha - \alpha^g) \varphi_t a_t \left(\frac{l_t}{K_{t-1}} \right)^{-\alpha} \left(\frac{l_t}{K_{t-1}^g} \right)^{-\alpha^g} - W_t^r = 0$$

$$(3-46) \quad \alpha \varphi_t a_t \left(\frac{l_t}{K_{t-1}} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{l_t}{K_{t-1}^g} \right)^{-\alpha^g} - R_t^r = 0$$

■ 政府部門

$$(3-47) \quad \ln \left(\frac{G_t^c}{g_y^c Y_{ss}} \right) = \rho^{gc} \ln \left(\frac{G_{t-1}^c}{g_y^c Y_{ss}} \right) + \varepsilon_t^{gc}$$

$$(3-48) \quad \ln \left(\frac{G_t^i}{g_y^i Y_{ss}} \right) = \rho^{gi} \ln \left(\frac{G_{t-1}^i}{g_y^i Y_{ss}} \right) + \varepsilon_t^{gi}$$

$$(3-49) \quad G_t^c + G_t^i = T_t$$

■ 中央銀行

$$(3-50) \quad \ln \left(\frac{R_t}{\bar{R}} \right) = \rho^r \ln \left(\frac{R_{t-1}}{\bar{R}} \right) + (1 - \rho^r) \left[(1 + \psi_\pi) \ln(\pi_t) + \psi_y \ln \left(\frac{Y_t}{a_t \bar{Y}} \right) \right] + \varepsilon_t^r$$

■ 市場均衡式

$$(3-51) \quad Y_t = C_t + I_t^o + G_t^c + G_t^i + \frac{\xi}{2} (\pi_t - 1)^2 Y_t$$

■ 各確率トレンド

$$(3-39) \quad \ln(a_t) = \rho^z \ln(a_{t-1}) + \varepsilon_t^a$$

$$(3-3) \quad \ln(z_t^c) = \rho^c \ln(z_{t-1}^c) + \varepsilon_t^c$$

$$(3-3) \quad \ln(z_t^l) = \rho^l \ln(z_{t-1}^l) + \varepsilon_t^l$$

$$(3-3) \quad \ln(z_t^i) = \rho^i \ln(z_{t-1}^i) + \varepsilon_t^i$$

表 3-8 内生変数一覧 (DSGE モデル : ベースラインモデル+非リカーディアン家計)

内生変数	定義
C_t	消費
C_t^o	リカーディアン家計の消費
C_t^r	非リカーディアン家計の消費
l_t	労働
l_t^o	リカーディアン家計の労働
l_t^r	非リカーディアン家計の労働
W_t	実質賃金
I_t	民間設備投資
G_t^c	政府消費
G_t^i	政府投資
K_t	民間資本
K_t^g	社会資本
R_t^k	実質金利
Π_t	インフレ率
R_t	名目金利
Y_t	GDP
$D_{t,t+1}$	確率的割引因子
λ_t	ラグランジュ乗数 (消費の限界効用)
q_t	ラグランジュ乗数 (資本)
ϕ_t	ラグランジュ乗数 (限界費用)
a_t	技術トレンド
τ_t	税
z_t^c	消費の効用の乖離項
z_t^l	労働の効用の乖離項
z_t^i	投資の乖離項

表 3-9 外生ショック一覧 (DSGE モデル : ベースラインモデル+非リカーディアン家計)

外生ショック	定義
ε_t^a	技術ショック
$\varepsilon_t^{g^c}$	政府消費ショック
$\varepsilon_t^{g^i}$	政府投資ショック
ε_t^r	金融政策ショック
ε_t^c	消費選好ショック
ε_t^l	労働供給ショック
ε_t^i	投資ショック

表 3-10 パラメータ一覧 (DSGE モデル : ベースラインモデル+非リカーディアン家計)

パラメータ	定義
β	主観的割引因子
η^l	労働供給弾性値
A^l	労働供給のスケールパラメータ
α	所得の労働分配率
δ	民間資本減価償却率
χ	投資の調整コスト
η	中間財間の代替の弾性値
ξ	Rotemberg パラメータ
Φ_π	金利のインフレ感応度
Φ_Y	金利の GDP ギャップ感応度
ρ^r	金利スムージングパラメータ
ρ^μ	技術トレンドパラメータ
ρ^c	消費ショック持続性パラメータ
ρ^l	労働供給ショック持続性パラメータ
ρ^i	投資ショック持続性パラメータ
ρ^{g^i}	政府投資ショック持続性パラメータ
ρ^{g^c}	政府消費ショック持続性パラメータ
$\ln(a)$	定常状態技術水準
λ	非リカーディアン家計の割合
α^g	社会資本生産性
δ^g	社会資本減価償却率
g_y^c	政府消費対 GDP 比率
g_y^i	政府投資対 GDP 比率
ρ^{g^c}	政府消費ショック持続性パラメータ
ρ^{g^i}	政府投資ショック持続性パラメータ

3.4. 非分離型効用関数の導入

前節ではベースラインモデルに非リカーディアン家計を導入する拡張を試みた。しかし第1章で紹介したように、政府支出による消費のクラウドインを再現するDSGEの拡張には別の方法も提案されている。Linnemann (2006)では、家計の効用関数において消費と余暇（労働）が加法分離性を持たず、かつ消費の異時点間の代替弾力性が1より小さいという条件を満たす場合、消費のクラウドインが発生することを示した（1.2.2項参照）。

本節では、ベースラインモデルにおける家計の効用関数を、Linnemann(2006)に従って非分離型効用関数に変更することを考える。すなわち、効用関数が非分離型の場合、政府支出による雇用の増加（つまり余暇の減少）に伴う消費の限界効用の増加によって、同時に消費が増加する可能性が高まる。

具体的には以下のような効用関数を設定することが考えられる：

$$\max E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{t+s} U(X_{t+s}, l_{t+s}) = \max E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{t+s} z_t^c \left[\frac{X_{t+s}^{1-\sigma} \left(1 + \frac{1-\sigma}{1+\eta^l} A^l z_t^l l_{t+s}^{1+\eta^l} \right)^\sigma - 1}{1-\sigma} \right] \quad (3-70)$$

ここで、 $X_{t+s} = C_{t+s} - \theta^c C_{t+s-1}$ であり、（集計的な）習慣形成調整済みの消費を示す。また σ は労働と余暇の代替のパラメータ、 η^l は異時点間の労働供給弾性値²⁸の逆数、 A^l はスケールパラメータである。 $\sigma = 1$ の時にはベースラインモデルの効用関数で $\sigma^c = 1$ とおいた場合と同じになる。その他の設定は前節までのモデルと同じとするが、本節での拡張に加えて次節で消費の（個別の）習慣形成（Deep habits）を導入したモデルを構築する。次節の最後に要約モデルと各変数およびパラメータの一覧を掲載する。

²⁸ Frisch 弾力性とも呼ばれる。

3.5. Deep habits の導入

前節ではベースライン（標準的 DSGE+社会資本の生産力効果）モデルに、家計の効用関数を消費・余暇の非分離型を用いる拡張を加えた。本節では、前節のモデルに、Ravn et al. (2006)で提案された家計の消費の習慣形成（Deep habits）の導入を行う。同論文では、過去の消費水準を基準点にして消費の効用を測る消費の習慣形成（Deep habits）の導入によって、現在の効用が過去の消費水準（の累積値）に依存する状況を定式化した。この結果、消費や賃金が政府支出に対して正循環的に反応する、すなわち政府支出の増加が消費の増加（クラウドイン）をもたらすことを明らかにした。本研究では、非分離型の効用関数を維持しながら Deep habits の導入による拡張を試みる。

消費の習慣形成を含む家計の最適化行動

まず、家計の持つ効用関数を以下のように定式化する。

$$\max E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s U(X_{t+s}, l_{t+s}) = \max E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s Z_t^b \left[\frac{X_{t+s}^{1-\sigma} \left(1 + \frac{1-\sigma}{1+\eta^l} A^l l_{t+s}^{1+\eta^l} \right) - 1}{1-\sigma} \right] \quad (3-71)$$

ここで、 X_t は（集計的な）習慣形成調整済み(habit adjusted consumption) の民間消費財(private consumption) と公共消費財(public consumption) によって構成される合成財(composite) であり、以下の関数型で定義される。

$$X_t \equiv \left[v_x (X_t^c)^{\frac{\sigma^x-1}{\sigma^x}} + (1-v_x) (X_t^g)^{\frac{\sigma^x-1}{\sigma^x}} \right]^{\frac{\sigma^x}{\sigma^x-1}} \quad (3-72)$$

なお、Ravn et al.(2006)では、家計が 0-1 区間内での連続体である(continuum、すなわち選好の異質性を認めている)ことを仮定しているため、正確には各変数を $X_t^h, X_t^{c,h}, X_t^{g,h}$ ($h \in \{0,1\}$) のように表記すべきであるが、本研究では同質性を仮定し、 h の添字は省略している。

z_t^x は平均 1 の確率的選好ショックである。本モデルでは、確率的ショック z_t^x を以下のように一次の自己回帰過程として定義する。

$$z_t^x = z_{t-1}^{\rho^x} e^{\varepsilon_t^x} \quad (3-73)$$

$$\varepsilon_t^x \sim N(0, \sigma^x) \quad (3-74)$$

家計の予算制約を以下のように設定する。

$$X_t^c + \Omega_t + I_t + \frac{B_t}{P_t} = \frac{W_t}{P_t} l_t + R_t^k K_{t-1} + \frac{R_{t-1} B_{t-1}}{P_t} + \int_0^1 J_{jt} dj - T_t \quad (3-75)$$

左辺の $X_t^c, l_t, \frac{B_t}{P_t}$ はそれぞれ、(集計的な) 習慣形成調整済み民間消費、民間投資、国債保有額の実質値を表している。また、右辺はそれぞれ、実質労働所得 $\frac{W_t}{P_t}$ 、資本所得 $R_t^k K_{t-1}$ 、企業利潤 $\int_0^1 J_{jt} dj$ 、一括税 T_t を表している。さらに Ω_t は民間消費の習慣形成累積値 (stock of habits in the private consumption) であり、以下のように定義される。

$$\Omega_t \equiv \theta^c \int_0^1 \frac{P_{jt}}{P_t} \mathcal{S}_{jt-1}^c dj \quad (3-76)$$

ここで $j \in (0,1)$ は消費財のバラエティを表す。また \mathcal{S}_{jt-1}^c は、 t 期における j 財の累積された習慣形成であり、各財の実質価格をかけ合わせたものを合計する形となっている。 θ^c は習慣形成の強度を表すパラメータである。

また、資本の動学は以下の資本蓄積式に従う。

$$K_t = (1 - \delta)K_{t-1} + z_t^i \left[1 - S\left(\frac{l_t}{l_{t-1}}\right) \right] l_t \quad (3-77)$$

ここで、 $S\left(\frac{l_t}{l_{t-1}}\right)$ は投資の調整費用である。投資の調整費用の関数型は以下のように定義している。

$$S(x_t) = \frac{1}{2} [\exp(\chi(x_t - 1)) + \exp(-\chi(x_t - 1)) - 2] \quad (3-78)$$

習慣形成調整済み民間消費の限界効用と労働の限界不効用は以下のとおりである。

$$\frac{\partial U}{\partial X_t^c} = z_t^b v_x X_t^{-\sigma} \left(\frac{X_t}{X_t^c} \right)^{\frac{1}{\sigma^x}} \left(1 + \frac{1 - \sigma}{1 + \eta^l} A^l l_t^{1+\eta^l} \right)^\sigma \quad (3-79)$$

$$\frac{\partial U}{\partial l_t} = z_t^b \sigma X_t^{1-\sigma} \left[1 + \frac{1 - \sigma}{1 + \eta^l} A^l l_t^{1+\eta^l} \right]^{\sigma-1} A^l l_t^{\eta^l} \quad (3-80)$$

この家計の制約条件付き効用最大化問題において、コントロール変数は $X_t^c, l_t, B_t, I_t, K_t$ である。以下は上記制約付き最大化問題の一階の条件である。

$$\partial X_t^c: \frac{\partial U}{\partial X_t^c} - \Lambda_t = 0 \quad (3-81)$$

$$\partial l_t: \Lambda_t W_t^r - \frac{\partial U}{\partial l_t} = 0 \quad (3-82)$$

$$\partial B_t: \frac{\beta R_t \Lambda_{t+1}}{\pi_{t+1}} - \Lambda_t = 0 \quad (3-83)$$

$$\partial I_t: \beta z_{t+1}^i Q_{t+1} S' \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right) \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right)^2 + z_t^i Q_t \left[1 - S \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) - S' \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right] - \Lambda_t = 0 \quad (3-84)$$

$$\partial K_t: \beta R_{t+1}^k \Lambda_{t+1} + \beta(1 - \delta) Q_{t+1} - Q_t = 0 \quad (3-85)$$

ラグランジュ乗数を用いて、確率的割引因子(SDF:stochastic discount factor) を定義する。

$$D_{t,t+s} = \beta^s \frac{\Lambda_{t+s}}{\Lambda_t} \quad (3-86)$$

Deep habits (消費の習慣形成) の詳細

上記で述べたように、Ravn et al. (2006)に倣って家計の異質性を考慮すると、その習慣形成調整済みの民間消費と公共消費はそれぞれ $X_t^{c,h}$ と $X_t^{g,h}$ となり、 $h \in \{0,1\}$ でインデックスされた形で表現される。これらは各財ごとに過去の消費履歴と比較してある期の消費を評価している。具体的には以下のような集計関数(Aggregator) を仮定している。

$$X_t^{c,h} = \left[\int_0^1 (C_{j,t}^h - \theta^c S_{j,t-1}^c)^{1-\frac{1}{\eta}} dj \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\eta}}} \quad (3-87)$$

$$X_t^{g,h} = \left[\int_0^1 (G_{j,t}^{c,h} - \theta^g S_{j,t-1}^g)^{1-\frac{1}{\eta}} dj \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\eta}}} \quad (3-88)$$

ここで、 $S_{j,t-1}^c$ と $S_{j,t-1}^g$ はt期における習慣形成の「累積値」である。習慣形成の累積値は、以下のようにすべての過去の消費の加重平均に依存すると仮定されている。

$$S_{j,t-1}^c = \rho^c S_{j,t-1}^c + (1 - \rho^c) C_{j,t} \quad (3-89)$$

$$S_{j,t-1}^g = \rho^g S_{j,t-1}^g + (1 - \rho^g) G_{j,t}^c \quad (3-90)$$

ここで $\rho^c \in [0,1)$ と $\rho^g \in (0,1)$ は財jのクロスセクション平均値に調整される速度を表すパラメータである。先に家計の習慣形成調整済み民間消費の最適化の一階条件を導出した((3-81)~(3-85))。集計化された消費 C_t を求めるには、民間消費の最適化の一階条件に加えて、上記集計関数を制約条件とする家計hの総支出 $\int_0^1 P_{j,t} C_{j,t}^h dj$ を最小化する問題を解く必要がある。すなわち：

$$\min \int_0^1 P_{j,t} C_{j,t}^h dj \quad (3-91)$$

$$\text{s.t. } X_t^{c,h} = \left[\int_0^1 (C_{j,t}^h - \theta^c S_{j,t-1}^c)^{1-\frac{1}{\eta}} dj \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\eta}}} \quad (3-92)$$

より、以下のラグランジアンを定式化する：

$$\mathcal{L} = \sum_{s=0}^{\infty} E_t \int_0^1 P_{j,t} C_{j,t}^h dj + \lambda \left\{ X_t^{c,h} - \left[\int_0^1 (C_{j,t}^h - \theta^c S_{j,t-1}^c)^{1-\frac{1}{\eta}} dj \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\eta}}} \right\} \quad (3-93)$$

$C_{j,t}^h$ の一階条件は以下のとおりである。

$$P_{j,t} - \lambda \left\{ \left[\int_0^1 (C_{j,t}^h - \theta^c S_{j,t-1}^c)^{1-\frac{1}{\eta}} dj \right]^{\frac{1}{\eta}} \right\} = 0 \quad (3-94)$$

$$\Rightarrow C_{j,t}^h = \left(\frac{P_{j,t}}{\lambda} \right)^{-\eta} X_t^{c,h} + \theta^c S_{j,t-1}^c \quad (3-95)$$

ここで本研究における家計の同質性から、 h の添字は外れて以下を得る：

$$C_{j,t} = \left(\frac{P_{j,t}}{\lambda} \right)^{-\eta} X_t^c + \theta^c S_{j,t-1}^c \quad (3-96)$$

$$X_t^c = \left[\int_0^1 (C_{j,t}^c - \theta^c S_{j,t-1}^c)^{1-\frac{1}{\eta}} dj \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\eta}}} \quad (3-97)$$

一階条件を制約式に代入し、整理する。

$$X_t^c = \left[\int_0^1 \left(\left(\frac{P_{j,t}}{\lambda} \right)^{-\eta} X_t^c + \theta^c S_{j,t-1}^c - \theta^c S_{j,t-1}^c \right)^{1-\frac{1}{\eta}} dj \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\eta}}} \quad (3-98)$$

$$\Rightarrow \lambda = \left[\int_0^1 P_{j,t}^{1-\eta} dj \right]^{\frac{1}{1-\eta}} \quad (3-99)$$

ここで、 λ を物価水準 P_t として定義する。

$$P_t = \lambda = \left[\int_0^1 P_{j,t}^{1-\eta} dj \right]^{\frac{1}{1-\eta}} \quad (3-100)$$

これを元の一階条件に代入して、以下の民間消費財 j の需要関数を得る。

$$C_{j,t} = \left(\frac{P_{j,t}}{P_t}\right)^{-\eta} X_t^c + \theta^c S_{j,t-1}^c \quad (3-101)$$

対称均衡(symmetric equilibrium)を仮定して、以下の集計化された消費 C_t を得る。

$$C_t = X_t^c + \theta^c S_{t-1}^c \quad (3-102)$$

このモデルでは、家計は最適な政府消費の水準を選択する。上記と同様の制約付き支出最小化問題を解くことで、以下の政府消費需要関数を得る。

$$G_{j,t}^c = \left(\frac{P_{j,t}}{P_t}\right)^{-\eta} X_t^g + \theta^c S_{j,t-1}^g \quad (3-103)$$

消費と同様に対称均衡を仮定して、以下を得る。

$$G_t^c = X_t^g + \theta^g S_{t-1}^g \quad (3-104)$$

企業

このモデルでは、政府の公共投資 G_t^i によって形成される公共資本ストック K_t^g も企業の生産量 Y_t に影響することを仮定する。生産関数は一次同次性を仮定している。また、その他の変数は、技術水準 a_t 、資本 K_{t-1} 、労働 l_t 、固定費用 $\bar{\Psi}$ と標準的設定と同一である。

$$Y_{j,t} = a_t K_{j,t-1}^\alpha l_{j,t}^{1-\alpha-\alpha^g} (K_{t-1}^g)^{\alpha^g} - \bar{\Psi} \quad (3-105)$$

$$\ln(a_t) = \rho^a \ln(a_{t-1}) + \varepsilon_t^a \quad (3-106)$$

企業利潤関数は以下のように定義される。

$$J_{jt} = E_T \sum_{s=0}^{\infty} D_{t,t+s} \left[\frac{P_{jt+s}}{P_{t+s}} Y_{j,t+s} - \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} l_{j,t+s} - R_{t+s}^k K_{jt-1+s} - \frac{\xi}{2} \left(\frac{P_{jt+s}}{P_{jt-1+s}} - 1 \right)^2 Y_t \right] \quad (3-107)$$

最後の項は Rotemberg 型価格調整費用である。企業のラグランジアンは以下のとおりである。

$$\mathcal{L} = \sum_{s=0}^{\infty} E_t D_{t,t+s} \left[\begin{aligned} & \frac{P_{j,t+s}}{P_{t+s}} (C_{j,t+s} + G_{j,t+s}^c + G_{j,t+s}^i + I_{j,t+s}) - \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} l_{j,t+s} \\ & - R_{t+s}^k K_{j,t-1+s} - \frac{\xi}{2} \left(\frac{P_{j,t+s}}{P_{j,t-1+s}} - 1 \right)^2 Y_t \\ & + \varphi_{t+s} \left\{ a_{t+s} K_{t-1+s}^\alpha l_{t+s}^{1-\alpha-\alpha^g} (K_{t+s}^g)^{\alpha^g} \right. \\ & \quad \left. - \bar{\varphi} - C_{j,t+s} - G_{j,t+s}^c - G_{j,t+s}^i - I_{j,t+s} \right\} \\ & + v_{t+s}^c \left\{ \left(\frac{P_{j,t+s}}{P_{t+s}} \right)^{-\eta} X_{t+s}^c + \theta^c \mathcal{S}_{j,t-1+s}^c - C_{j,t+s} \right\} \\ & \quad + \mu_{t+s}^c \left\{ \varrho^c \mathcal{S}_{j,t-1+s}^c + (1 - \varrho^c) C_{j,t+s} - \mathcal{S}_{j,t+s}^c \right\} \\ & + v_{t+s}^g \left\{ \left(\frac{P_{j,t+s}}{P_{t+s}} \right)^{-\eta} X_{t+s}^g + \theta^g \mathcal{S}_{j,t-1+s}^g - G_{j,t+s} \right\} \\ & \quad + \mu_{t+s}^g \left\{ \varrho^g \mathcal{S}_{j,t-1+s}^g + (1 - \varrho^g) G_{j,t+s} - \mathcal{S}_{j,t+s}^g \right\} \\ & + v_{t+s}^i \left\{ \left(\frac{P_{j,t+s}}{P_{t+s}} \right)^{-\eta} l_{t+s} - I_{j,t+s} \right\} \end{aligned} \right] \quad (3-108)$$

この制約付き利潤最大化問題のコントロール変数は、 $P_{j,t}, l_{j,t}, K_{j,t-1}, C_{j,t}, \mathcal{S}_{j,t}^c, G_{j,t}^c, \mathcal{S}_{j,t}^g, I_{j,t}$ であり、一階の条件は以下のとおり：

$$\partial P_{j,t} : \xi D_{t,t+1} \pi_{t+1} (\pi_{t+1} - 1) Y_{t+1} - \xi \pi_t (\pi_t - 1) Y_t - \eta v_t^c X_t^c - \eta v_t^g X_t^g + C_t + G_t^c + G_t^i + (1 - \eta v_t^i) I_t = 0 \quad (3-109)$$

$$\partial l_{j,t} : (1 - \alpha - \alpha^g) \varphi_t a_t \left(\frac{K_{t-1}}{l_t} \right)^\alpha \left(\frac{K_t^g}{l_t} \right)^{\alpha^g} - W_t^r = 0 \quad (3-110)$$

$$\partial K_{j,t-1} : \alpha \varphi_t a_t \left(\frac{K_{t-1}}{l_t} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{K_t^g}{l_t} \right)^{\alpha^g} - R_t^k = 0 \quad (3-111)$$

$$\partial C_{j,t} : v_t^c = 1 - \varphi_t + (1 - \varrho^c) \mu_t^c \quad (3-112)$$

$$\partial \mathcal{S}_{j,t}^c : \mu_t^c = D_{t,t+1} (\theta^c v_{t+1}^c + \varrho^c \mu_{t+1}^c) \quad (3-113)$$

$$\partial G_{j,t}^c : v_t^g = 1 - \varphi_t + (1 - \varrho^{gc}) \mu_t^c \quad (3-114)$$

$$\partial \mathcal{S}_{j,t}^g : \mu_t^g = D_{t,t+1} (\theta^g v_{t+1}^g + \varrho^{gc} \mu_{t+1}^g) \quad (3-115)$$

$$\partial I_{j,t} : v_t^i = 1 - \varphi_t \quad (3-116)$$

政府

政府は家計の効用に影響する政府消費と企業の生産に影響する政府投資の二種類の政府支出を行う。各政府支出は、以下の一次の自己回帰過程に従うと仮定する。

$$\ln \left(\frac{G_t^c}{g c^y \bar{Y}} \right) = \rho^{gc} \ln \left(\frac{G_{t-1}^c}{g c^y \bar{Y}} \right) + \varepsilon_t^{gc} \quad (3-117)$$

$$\ln\left(\frac{G_t^i}{g_i^y \bar{Y}}\right) = \rho^{gi} \ln\left(\frac{G_{t-1}^i}{g_i^y \bar{Y}}\right) + \varepsilon_t^{gi} \quad (3-118)$$

ここで、 gc^y と gi^y は過去の政府消費対実質 GDP 比と政府投資対実質 GDP 比の平均値である。なお、 \bar{Y} は実質 GDP のサンプル平均である。

また、政府の予算制約は以下を仮定する：

$$G_t^c + G_t^i = T_t \quad (3-119)$$

中央銀行

中央銀行は以下のテイラールールに従って、金利を決定すると仮定する。

$$\ln\left(\frac{R_t}{\bar{R}}\right) = \rho^r \ln\left(\frac{R_{t-1}}{\bar{R}}\right) + (1 - \rho^r) \left[(1 + \psi_\pi) \ln(\pi_t) + \psi_y \ln\left(\frac{Y_t}{Z_t \bar{Y}}\right) \right] + \varepsilon_t^r \quad (3-120)$$

市場均衡条件

市場均衡条件は以下のとおりである。

$$Y_t = C_t + I_t + G_t^c + G_t^i + \frac{\xi}{2} (\pi_t - 1)^2 Y_t \quad (3-121)$$

以上が、本研究のベースライン（標準的 DSGE+社会資本の生産力効果）モデルに、効用関数の非分離型関数への拡張および Deep habits が存在するケースを同時に考慮・拡張したモデルの詳細である。表 3-11 に本モデルの要約モデルを掲載する。また、本修正モデルにおける内生変数（30 個）、外生変数およびパラメータはそれぞれ表 3-14、表 3-13、表 3-14 のとおりである：

表 3-11: 非分離型効用関数+Deep habits 導入モデルの要約モデル

■ 家計部門

$$(3-72) \quad X_t = \left[v_x (X_t^c)^{\frac{\sigma^x - 1}{\sigma^x}} + (1 - v_x) (X_t^g)^{\frac{\sigma^x - 1}{\sigma^x}} \right]^{\frac{\sigma^x}{\sigma^x - 1}}$$

$$(3-79) \quad \Lambda_t = z_t^b v_x X_t^{-\sigma} \left(\frac{X_t}{X_t^c} \right)^{\frac{1}{\sigma^x}} \left(1 + \frac{1 - \sigma}{1 + \eta^l} A^l l_t^{1 + \eta^l} \right)^\sigma$$

$$(3-80) \quad \Lambda_t W_t^r = z_t^b \sigma X_t^{1 - \sigma} \left[1 + \frac{1 - \sigma}{1 + \eta^l} A^l l_t^{1 + \eta^l} \right]^{\sigma - 1} A^l l_t^{\eta^l}$$

$$(3-84) \quad \beta z_{t+1}^i Q_{t+1} S' \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right) \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right)^2 + Z_t^i Q_t \left[1 - S \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) - S' \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right] - \Lambda_t = 0$$

$$(3-85) \quad \beta R_{t+1}^k \Lambda_{t+1} + \beta (1 - \delta) Q_{t+1} - Q_t = 0$$

$$(3-83) \quad \frac{\beta R_t \Lambda_{t+1}}{\pi_{t+1}} - \Lambda_t = 0$$

$$(3-102) \quad C_t = X_t^c + \theta^c S_{t-1}^c$$

$$(3-89) \quad S_{j,t-1}^c = \rho^c S_{j,t-1}^c + (1 - \rho^c) C_{j,t}$$

$$(3-104) \quad G_t^c = X_t^g + \theta^g S_{t-1}^g$$

$$(3-90) \quad S_{j,t-1}^g = \rho^g S_{j,t-1}^g + (1 - \rho^g) G_{j,t}^c$$

■ 資本の遷移式

$$(3-77) \quad K_t = (1 - \delta)K_{t-1} + Z_t^i \left[1 - S \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right] I_t$$

$$(3-40) \quad K_t^g = (1 - \delta^g)K_{t-1}^g + G_t^i$$

■ 確率的割引因子

$$(3-86) \quad D_{t,t+s} = \beta^s \frac{\Lambda_{t+s}}{\Lambda_t}$$

■ 企業部門

$$(3-105) \quad Y_{j,t} = a_t K_{j,t-1}^\alpha l_{j,t}^{1-\alpha-\alpha^g} (K_{t-1}^g)^{\alpha^g} - \bar{\Psi}$$

$$(3-109) \quad \xi D_{t,t+1} \pi_{t+1} (\pi_{t+1} - 1) Y_{t+1} - \xi \pi_t (\pi_t - 1) Y_t - \eta v_t^c X_t^c - \eta v_t^g X_t^g + C_t + G_t^c + G_t^i + (1 - \eta v_t^i) I_t = 0$$

$$(3-110) \quad (1 - \alpha - \alpha^g) \varphi_t a_t \left(\frac{K_{t-1}}{l_t} \right)^\alpha \left(\frac{K_t^g}{l_t} \right)^{\alpha^g} - W_t^r = 0$$

$$(3-111) \quad \alpha \varphi_t a_t \left(\frac{K_{t-1}}{l_t} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{K_t^g}{l_t} \right)^{\alpha^g} - R_t^k = 0$$

$$(3-114) \quad v_t^g = 1 - \varphi_t + (1 - \rho^{gc}) \mu_t^c$$

$$(3-113) \quad \mu_t^c = D_{t,t+1} (\theta^c v_{t+1}^c + \rho^c \mu_{t+1}^c)$$

$$(3-112) \quad v_t^c = 1 - \varphi_t + (1 - \rho^c) \mu_t^c$$

$$(3-115) \quad \mu_t^g = D_{t,t+1} (\theta^g v_{t+1}^g + \rho^{gc} \mu_{t+1}^g)$$

$$(3-116) \quad v_t^i = 1 - \varphi_t$$

■ 政府部門

$$(3-117) \quad \ln\left(\frac{G_t^c}{g c^y \bar{Y}}\right) = \rho^{g^c} \ln\left(\frac{G_{t-1}^c}{g c^y \bar{Y}}\right) + \varepsilon_t^{g^c}$$

$$(3-118) \quad \ln\left(\frac{G_t^i}{g i^y \bar{Y}}\right) = \rho^{g^i} \ln\left(\frac{G_{t-1}^i}{g i^y \bar{Y}}\right) + \varepsilon_t^{g^i}$$

$$(3-119) \quad G_t^c + G_t^i = T_t$$

■ 中央銀行

$$(3-120) \quad \ln\left(\frac{R_t}{\bar{R}}\right) = \rho^r \ln\left(\frac{R_{t-1}}{\bar{R}}\right) + (1 - \rho^r) \left[(1 + \psi_\pi) \ln(\pi_t) + \psi_y \ln\left(\frac{Y_t}{Z_t \bar{Y}}\right) \right] + \varepsilon_t^r$$

■ 市場均衡式

$$(3-121) \quad Y_t = C_t + I_t + G_t^c + G_t^i + \frac{\xi}{2} (\pi_t - 1)^2 Y_t$$

■ 確率トレンド

$$(3-106) \quad \ln(A_t) = \rho^a \ln(A_{t-1}) + \varepsilon_t^a$$

$$(3-73)a \quad Z_t^b = Z_{t-1}^{\rho^b} e^{\varepsilon_t^b}$$

$$(3-73)b \quad Z_t^i = Z_{t-1}^{\rho^i} e^{\varepsilon_t^i}$$

$$(3-73)c \quad Z_t^l = Z_{t-1}^{\rho^l} e^{\varepsilon_t^l}$$

表 3-12 内生変数 (DSGE モデル : 標準 + 社会資本 + 非分離型効用関数 + Deep habits)

内生変数	定義
C_t	消費
l_t	労働
W_t	実質賃金
X_t	習慣形成調整済み合成財
X_t^c	習慣形成調整済み民間消費
X_t^g	習慣形成調整済み公共財消費
$S_{j,t}^c$	民間消費の習慣形成の累積値
$S_{j,t}^g$	公共財消費の習慣形成の累積値
I_t	民間設備投資
G_t^c	政府消費
G_t^i	政府投資

K_t	民間資本
K_t^g	社会資本
R_t^k	実質金利
π_t	インフレ率
R_t	名目金利
Y_t	GDP
T_t	税
$D_{t,t+1}$	確率的割引因子
λ_t	ラグランジュ乗数 (消費の限界効用)
q_t	ラグランジュ乗数 (資本)
ϕ_t	ラグランジュ乗数 (限界費用)
A_t	技術トレンド
μ_t^c	ラグランジュ乗数 (民間消費の習慣形成)
μ_t^g	ラグランジュ乗数 (公共財消費の習慣形成)
v_t^c	ラグランジュ乗数 (民間消費)
v_t^g	ラグランジュ乗数 (公共財消費)
v_t^i	ラグランジュ乗数 (民間投資)
z_t^b	消費の効用の乖離項
z_t^l	労働の効用の乖離項
z_t^i	投資の乖離項

表 3-13 外生ショック (DSGE モデル : 標準+社会資本+非分離型効用関数+Deep habits)

外生ショック	定義
ε_t^μ	技術ショック
$\varepsilon_t^{g^c}$	政府消費ショック
$\varepsilon_t^{g^i}$	政府投資ショック
ε_t^r	金融政策ショック
ε_t^c	消費選好ショック
ε_t^l	労働供給ショック
ε_t^i	投資ショック

表 3-14 パラメーター一覧 (DSGE モデル : 標準+社会資本+非分離型効用関数+Deep habits)

パラメータ	定義
β	主観的割引因子
σ	消費と余暇の代替弾力性
σ^x	消費と政府消費の代替弾力性

v_x	消費財のウェイト
θ^c	消費の習慣形成
θ^g	政府消費の習慣形成の強度
ϱ^c	累積消費の調整速度パラメータ
ϱ^g	累積政府消費の調整速度パラメータ
η^l	労働供給弾性値
A^l	労働供給のスケールパラメータ
α	所得の労働分配率
δ	民間資本減価償却率
χ	投資の調整コスト
η	中間財間の代替の弾性値
ξ	Rotemberg パラメータ
Φ_π	金利のインフレ感応度
Φ_Y	金利の GDP ギャップ感応度
ρ^r	金利スムージングパラメータ
ρ^μ	技術トレンドパラメータ
ρ^c	消費ショック持続性パラメータ
ρ^l	労働供給ショック持続性パラメータ
ρ^i	投資ショック持続性パラメータ
ρ^{g^i}	政府投資ショック持続性パラメータ
ρ^{g^c}	政府消費ショック持続性パラメータ
$\ln A$	定常状態技術水準
α^g	社会資本生産性
δ^g	社会資本減価償却率
g_y^c	政府消費対 GDP 比率
g_y^i	政府投資対 GDP 比率
ρ^{g^c}	政府消費ショック持続性パラメータ
ρ^{g^i}	政府投資ショック持続性パラメータ

3.6. 本調査研究で構築した DSGE モデルにおける主要な設定の組み合わせ

以上、本調査研究において検討した、財政政策パズルの解消に資すると考えられる DSGE モデルは、標準的な DSGE モデル (3.1 節) に社会資本の生産力効果を導入したもの (3.2 節) をベースラインモデルとして、①非リカーディアン家計の存在を考慮したもの (3.3 節)、及び②非分離型効用関数+Deep habits の存在を考慮したもの (3.4・3.5 節) の 2 つである。参考のため、以下に本調査で構築した DSGE モデルにおける主要な設定の組み合わせを記載する。

今後の発展として、非リカーディアン家計を考慮に入れた非分離型+Deep habits モデルが考えられるが、モデル構造が相当複雑になることが予想される。また、このモデルにおいて財政政策ショックを与えた際に、関心ある変数である GDP や家計消費が実際にどのような反応を示すかを調べていく必要があるが、本調査研究においてはその実施には至らず、今後の課題とした。

表 3-15 構築した DSGE モデルの主要な設定

	ベースラインモデル (標準的 DSGE+社会 資本の生産力効果) (3.1・3.2 節)	非リカーディアン家計 の考慮 (3.3 節)	非分離型効用関数 +Deep habits (3.4・3.5 節)
価格粘着性のタイプ	Rotemberg 型		
生産要素としての 社会資本	○	○	○
非リカーディアン 家計	—	○	—
非分離型効用関数	—	—	○
Deep habits	—	—	○

4章 まとめと課題

本調査研究では、経済効果の高いインフラ整備の実現に向けて、その経済効果を定量的に把握するために、近年のマクロ経済学研究を基礎とした分析手法に即したアプローチが重要となるとの問題意識から、政府支出の効果を分析するためのニューケインジアン動学的確率的一般均衡モデル (DSGE) モデルの構築を試みた。特に、インフラ整備を含む財政政策の効果に関して、VARなどの時系列分析では家計消費が増加するクラウドインが確認されている一方、DSGEによると家計消費がクラウドイングアウトしてしまうことの矛盾 (財政政策パズル) に着目した。本研究では、DSGE モデルにおける財政政策パズルおよびその問題の解決策に関する先行研究のレビュー、わが国マクロ経済データを用いた VAR モデルによる財政政策の実証分析および財政乗数の試算、並びに財政政策パズル解決として提案されている DSGE モデルの改良を試みた。

DSGE モデルの構築にあたっては、はじめに家計の異時点間の最適化行動、独占的競争モデル・硬直価格モデルによるインフレ率の内生化、テイラールールなどによる金融政策の内生化といった要素を備えた標準的なニューケインジアン DSGE モデルを設定した。続いて、社会資本の生産力効果を表現するため、社会資本を生産要素として生産関数に導入し、これを本研究のベースライン DSGE モデルとした。そのうえで、先行研究で提案されている財政政策パズルの解決策のうち、①異時点間の消費の最適化を行わない (非リカーディアン) 家計の存在の考慮、および②非分離型効用関数および消費の習慣形成 (Deep habits) の存在の考慮、の 2 つの方法でベースラインモデルの拡張を試みた。

本調査研究における成果は上記のとおりであるが、限られた時間の中で進めた研究であり、当初の目標である「独自の DSGE モデルの構築・運用」の達成には、いくつかの課題を残すことになった。特に、実際に構築したモデルのパラメータをデータを用いて推定し、財政政策の乗数推計までを行う必要があるが、本研究ではそこまでの実現には至らず、今後の課題とした。DSGE モデル自体は大規模かつ複雑であり、本調査研究で行った標準モデルに加えて、上記の改良を加えるだけでも、かなりの労力を要することとなった。また、それぞれの摩擦をすべて統合したモデルを構築できたわけではなく、改良の仕方にも課題は残されている。上記で考慮した修正以外にも、例えば賃金粘着性 (sticky wage) など消費のクラウドインを表現できる可能性がある。[反対に、考えるすべての摩擦を一つのモデルに含めることができたとしても、必ずしも他のモデルに比べて優れたモデルとなるとは限らない。上述したパラメータ推定も行いながら、最も目的に適うようなモデルを漸進的に開発・改良していく必要があるだろう。しかしながら、言い換えれば、まだまだ工夫の余地は多くある。財政政策の意思決定など政策判断に活かせる情報を提供できるだけの DSGE モデル開発に関する研究はようやく緒に就いた段階であり、本研究が今後の DSGE 研究の発展の一助となることを期待するものである。

最後に、本研究の実施にあたり、上田 晃三 早稲田大学教授、江口 允崇 駒澤大学准教授、西山 慎一 東北大学准教授、平賀 一希 東海大学准教授、廣瀬 康生 慶應義塾大学教授、藤原 一平 慶應義塾大学教授 (五十音順、所属・役職はヒアリング時) の 6 名の有識者から有益かつ貴重な意見を賜った。ここに改めて謝意を表したい。

補論A 財政支出乗数

本項では財政支出乗数に関するレビューを行う。財政支出乗数にはいくつかの定義が存在するが、一般的には裁量的な財政変数(ΔG_t または ΔT_t)の変化に対するGDP(ΔY_t)の変化の比率と定義される。つまり、財政支出乗数とは、1円あたりの政府支出または税収の変化がGDPの水準に与える影響を測るものである。Batini et al. (2014)によると財政支出乗数としてよく使われるのは以下の2つである：

$$\text{Impact multiplier} = \frac{\Delta Y(t)}{\Delta G(t)} \quad (\text{A-1})$$

$$\text{Multiplier at horizon } i = \frac{\Delta Y(t+i)}{\Delta G(t)} \quad (\text{A-2})$$

一般的には上記のような定義がされているものの、乗数の呼称は著者によって変わることがある。例えば、Mountford and Uhlig (2009)では、上記の multiplier at horizon i を impact multiplier と呼称している。また、同論文ではこの乗数に加えて、ある時点までの乗数効果の累計値を現在価値に割り引いた現在価値乗数：

$$\text{Present value multiplier at lag } k = \frac{\frac{\sum_{j=0}^k \hat{y}_{t+j}}{(1+i)^j}}{\frac{\sum_{j=0}^k \hat{f}_{t+j}}{(1+i)^j}} \cdot \frac{y}{f} \quad (\text{A-3})$$

を用いて裁量的財政政策のシナリオ効果の影響を分析している。ここで、 i は名目金利のサンプル期間平均値、 \hat{y}_{t+j} と \hat{f}_{t+j} は $t+j$ 時点における実体経済変数と財政変数（税や政府支出など）の定常状態からの乖離、 y と f はその定常値を表している。同論文では、政策シナリオごとに乗数（この論文でいう impact multiplier、分母をショックを与えた時点に固定： $\frac{\Delta Y(t+i)}{\Delta G(0)}$ ）と現在価値乗数

の推移を分析している(表 A-1、論文中の Table IV, TableII)。

現在価値乗数はある期間における財政政策効果の累計値を定量化できたため、公共投資の有効性の総合的な評価に適している。一方で、impact multiplier や multiplier at horizon i はある時点における公共投資の効果を可視化できるため、乗数効果の最大値などを知りたい場合に有効である。これらの指標は併用可能であるため、すべての乗数効果を算出することが公共投資の効果を多面的に検証する上では望ましいと考えられる。

表 A-1 Mountford and Uhlig (2009)におけるシナリオごとの乗数及び現在価値乗数

Table IV. Impact multipliers of a deficit-spending policy scenario

	1 qrt	4 qrts	8 qrts	12 qrts	20 qrts	Maximum
<i>Mountford and Uhlig</i>						
GDP	0.65	0.27	-0.74	-1.19	-2.24	0.65 (qrt 1)
Gov. spending	1.00	1.00	0.90	0.37	-0.32	
Tax revenues	0.00	0.00	-0.33	-0.87	-2.04	
<i>Blanchard and Perotti (2002)</i>						
GDP	0.90	0.55	0.65	0.66	0.66	0.90 (qrt 1)
Gov. spending	1.00	1.30	1.56	1.61	1.62	
Tax revenues	0.10	0.18	0.33	0.36	0.37	

This table shows the impact multipliers for a deficit-spending fiscal scenario for various quarters after the initial shock and compares them to similar measures from Blanchard and Perotti (2002 Table IV). The multiplier represents the effect in dollars of a one-dollar increase in spending at the first quarter. For the Mountford and Uhlig results this is calculated with the formula: Multiplier for GDP = $\frac{\text{GDP response}}{\text{Initial fiscal shock}}$ / (Average fiscal variable share of GDP), where the median responses are used in all cases. On the calculation of the Blanchard and Perotti (2002) multipliers see Blanchard and Perotti (2002 section V).

Table II. Present value multipliers of the policy scenarios

	1 qrt	4 qrts	8 qrts	12 qrts	20 qrts	Maximum
Deficit-financed tax cut	0.29	0.52	1.63	5.25	-4.55	5.25 (qrt 12)
Deficit spending	0.65	0.46	0.07	-0.26	-2.07	0.65 (qrt 1)

This table shows the present value multipliers for a deficit financed tax cut policy scenario and for a deficit-spending fiscal policy scenario. The multipliers given are the median multipliers in both cases.

(出所) Mountford and Uhlig (2009)より抜粋

補論B 名目金利が常にゼロ近傍 (zero interest rate lower bound) にある場合の政府支出に対する家計消費のクラウドインについて (Christiano et al. (2011))

Christiano et al.(2011)では名目金利が常にゼロ近傍にある場合、政府支出に対して家計消費のクラウドインが生じることが指摘された。補論 B では本調査の関連として同論文のレビューを行い、今後の DSGE モデルの拡張に関する参考とする。

政府支出乗数の測定はマクロ経済学において最も古典的な問題の一つであり、数多くの先行研究が存在する。実証研究では、Barro (1981) が政府支出乗数は約 0.8 であると推計している一方で、Ramey (2009) では 1.2 と推計している。一般均衡モデルを用いた政府支出乗数の推計も行われている。標準的なニューケインジアンモデルでは、政府支出乗数が 1 を超えるか否かは家計の選好のパラメータに依存する(Gali et al. (2007))。また、摩擦のない RBC モデルでは、政府支出乗数は 1 より小さいことが多い(Aiyagari et al. (1992) 等)。このように、先行研究を見る限り政府支出乗数が安定して 1 より大幅に大きいとは言い難い。

一方で、Christiano et al. (2011) では、名目金利がゼロ金利制約下にある場合、政府支出乗数は先行研究よりも遥かに高い値をとることを示し、その非整合性の要因について分析を行っている。同論文の理論的考察は、以下の 3 つのモデルによって行われている。

1. 資本が存在しない小規模 DSGE(Eggertsson and Woodford (2003)に基づく)
2. 資本が存在する小規模 DSGE
3. 中規模 DSGE(Altig et al. (2011)に基づく)

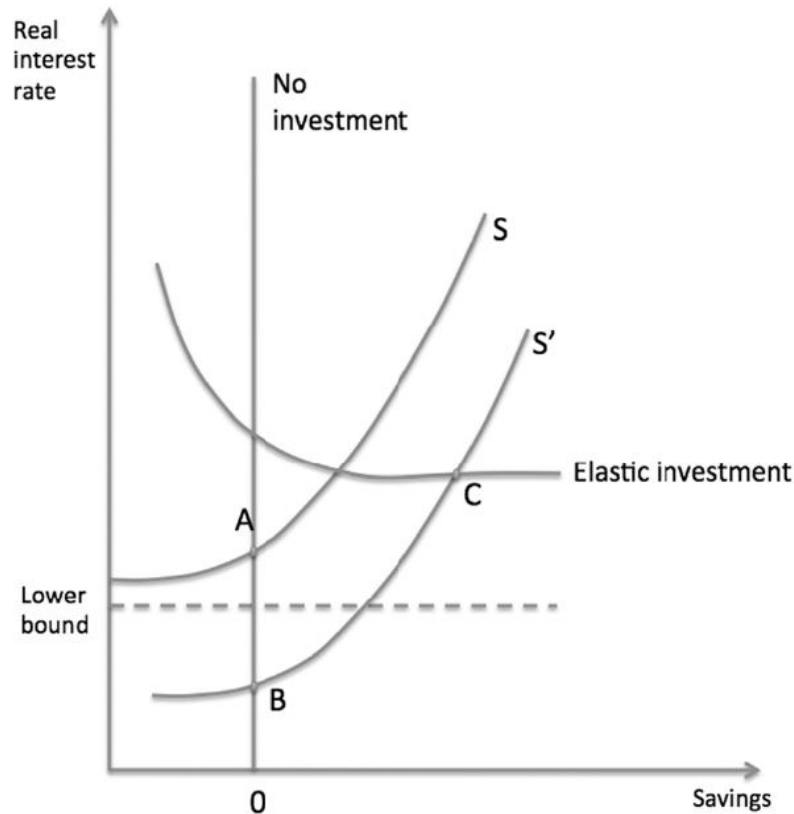
例えば、1. 資本が存在しない経済を想定する場合、マクロ経済では貯蓄と投資は等しくなるため、貯蓄は均衡において 0 に等しくならなければならない。この経済において、割引率に負のショックが与えられると、貯蓄意欲 (desired saving) は上昇するが、投資が存在しないため、貯蓄もゼロのままである。この時、ショックが十分小さい場合においては、実質金利の低下および緩やかな生産の下落が生じる。しかし、ショックの規模が大きい場合、実質金利が十分に低下する前に、名目金利が 0 に到達する。このモデルにおいて、経済システムの再均衡 (貯蓄=0) は生産の一時的な下落によってのみ達成される。したがって、生産の下落幅はゼロ金利制約下でない経済よりも非常に大きくなる。

このメカニズムは、本質的には価格硬直性の仮定によって引き起こされている。Calvo 型価格設定の下では、生産の下落は限界費用の下落と価格の下落、つまり将来のデフレーション期待を発生させる。名目金利が 0 にとらわれている場合、デフレーション期待によって実質金利は上昇し、実質金利が上昇することで、貯蓄意欲が上昇する。仮に資本が存在すれば、生産の減少を部分的に抑制する。しかし、資本が存在しない場合には貯蓄意欲を 0 にするために必要な生産の総下落が大きくなる。これは、Keynes (1936) や Krugman et al. (1998) で指摘された、貯蓄意欲の増加が均衡生産量を減少させる儉約の矛盾(the paradox of thrift) とよく似た現象である。

資本が存在する場合においては、均衡において貯蓄=0 という制約に縛られることはない。した

がって、割引率に負のショック、すなわち貯蓄意欲の上昇が発生した場合にも資本を持つことで実質金利(=資本の限界生産性)が上昇し、ゼロ金利制約に陥る可能性を緩和することができる。これらの分析を要約したのが以下の図 B-1 である。

図 B-1 ゼロ金利制約下における実質金利と貯蓄の関係



(出所) Christiano et al. (2011) より抜粋

S 曲線は貯蓄関数であり、実質金利に対して増加関数である。資本が存在しない場合、均衡点は A となる。破線は名目金利のゼロ金利制約を表す。割引率に強い負のショックがあった場合に、貯蓄意欲が増加することから、この貯蓄関数は右下にシフトし S' 曲線となり、新たな均衡点 B が実現する。このとき、資本が存在しない経済では、名目金利はゼロ金利制約にかかっている。一方で、資本が存在する経済では均衡点は C となり、ショックの規模が同一であってもゼロ金利制約にとらわれていないことがわかる。

中規模 DSGE による政府支出乗数の理論分析は、Altig et al. (2011) の実証的に尤もらしい DSGE モデルをベースにしている。Altig et al. (2011) のモデルは、Christiano et al. (2005) の摩擦(価格と賃金の摩擦、消費の習慣形成、可変資本利用、投資の調整コスト)を導入したモデルであり、パラメータは 10 個のマクロ変数とマッチするように推計されている。

この経済において、名目金利は以下のように決定される。

$$R_{t+1} = \max(Z_{t+1}, 0) \tag{B-4}$$

$$Z_{t+1} = \left(\frac{1}{\beta}\right) (1 + \pi_t)^{\phi_1(1-\rho_R)} \left(\frac{Y_t}{\bar{Y}}\right)^{\phi_2(1-\rho_R)} [\beta(1 + R_t)]^{\rho_R} - 1 \quad (\text{B-5})$$

ここで、

$$\pi_t = \beta E_t[\pi_{t+1}] + \kappa \widehat{MC}_t \quad (\text{B-6})$$

$$\kappa = \frac{(1-\theta)(1-\beta\theta)}{\theta} \quad (\text{B-7})$$

$$\widehat{MC}_t = \hat{C}_t + \frac{N}{1-N} \hat{N}_t \quad (\text{B-8})$$

であり、 \widehat{MC}_t は限界費用の定常値からの乖離を表す。式(B-4)はゼロ金利制約を表したものであり、経済がゼロ金利制約下にある状況では、 $R_{t+1} = 0$ となり、状況によっては名目金利が生産やインフレ率の変動に対して完全に非感応的になる。

資本がない場合においては、生産関数は $Y_t(i) = N_t(i)$ と仮定されている。 $\hat{Y}_t = \hat{N}_t$ の条件より以下を得る。

$$\pi_t = \beta E_t(\pi_{t+1}) + \kappa \left[\left(\frac{1}{1-g} + \frac{N}{1-N} \right) \hat{Y}_t - \frac{g}{1-g} \hat{G}_t \right] \quad (\text{B-9})$$

ここで、 g は定常状態の政府支出対 GDP 比である。式(B-6)と式(B-8)はそれぞれ、 t 期のインフレ率が同時点の限界費用と生産に依存することを示している。

経済の資源制約式を定常状態周りで一次近似して以下を得る。

$$\hat{Y}_t = (1-g)\hat{C}_t + g\hat{G}_t \quad (\text{B-10})$$

式(B-10)より、標準的な政府支出乗数 $\left(\frac{dY_t}{dG_t}\right)$ として以下を得る。

$$\frac{dY_t}{dG_t} = \frac{1}{g} \frac{\hat{Y}_t}{\hat{G}_t} = 1 + \frac{(1-g)}{g} \frac{\hat{C}_t}{\hat{G}_t} \quad (\text{B-11})$$

右辺第2項は政府支出に対する消費の反応である。政府支出が消費をクラウドアウトする場合、政府支出乗数は1より小さくなる。一方で、一部の研究によって示唆されているように政府支出が消費をクラウドインさせる場合、政府支出乗数は1を超える。つまり、シンプルなNKモデルにおいては、政府支出乗数が1を超えるという意味で有意義な波及効果を持つためには、消費のクラウドインが必要ということになる。

表 B-1は、標準的な政府支出乗数に対するパラメータ感応度をまとめたものである。Christiano et al. (2011) のパラメータ設定では、標準的な政府支出乗数は1.05と比較的尤もらしい値となっている。

表 B-1 標準的な政府支出乗数に対するパラメータ感応度

パラメータ	定義	政府支出乗数 に対する一階 微分の符号	備考
σ	相対的リスク回避度	正	
κ	NKPC の係数	負	価格の硬直性 θ が高いほど政府支出乗数が高くなる。 $\kappa < 0.13$ の領域で政府支出乗数が1を超える。
ϕ_1	名目金利のインフレ感応度	負	実質金利が政府支出に対してより鋭敏に上昇する結果、消費が抑えられて乗数効果が低下する。
ϕ_2	金利の GDP ギャップ感応度	負	ϕ_1 と同様の経路により消費が押さえられて乗数効果が低下する。
ρ_R	金利平滑化パラメータ	正	政府支出に対して金利引き締めが遅くなる結果、乗数効果が上昇する。 先行研究とも整合的な結果。
ρ	政府支出の持続性	負	政府支出に伴う税の現在価値が ρ の増加関数であるため、負の資産効果も ρ の増加関数となる。

次に、経済がゼロ金利制約に陥っている場合について考察する。家計の効用関数は以下のように定義される。

$$U = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} d_t \left\{ \frac{[C_t^\gamma (1 - N_t)^{1-\gamma}]^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + v(G_t) \right\} \quad (\text{B-12})$$

ここで、累積割引因子(d_t) は以下のように決まる。

$$d_t = \begin{cases} \frac{1}{1+r_1} \frac{1}{1+r_2} \cdots \frac{1}{1+r_t} & t \geq 1 \\ 1 & t = 0 \end{cases} \quad (\text{B-13})$$

r_t は時点 t の割引因子である。 r_t は 2 つの値 r と $r^l (< 0)$ をとり得ると想定する。 r は定常値であり、 $\beta = d = \frac{1}{1+r}$ である。 $r^l < 0$ の直感的な意味は、名目金利より期待インフレ率の方が高い状態を想定しているということである。割引因子がとり得る値は以下のように確率的に推移する。

$$\begin{aligned} Pr[r_{t+1} = r^l | r_t = r^l] &= p \\ Pr[r_{t+1} = r | r_t = r^l] &= 1 - p \\ Pr[r_{t+1} = r^l | r_t = r] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B-14})$$

p は経済がゼロ金利制約に直面した際に翌期もゼロ金利制約に留まり続ける確率を意味し、 $1-p$ はゼロ金利から離脱して実質金利が定常値に回帰する確率を意味する。本分析では、経済は初期時点において定常状態にあり、0 期において $r_1 = r^l$ とし、1 期以降は経済は式(B-14)の過程に従うと仮定する。また、 r^l は十分に低い値をとっているとする。

経済が $r_t = r^l$ の状態にある各変数は、 x^l と表記する。ゼロ金利制約下にある生産は、以下のよう
に決まる。

$$\hat{Y}^l = \frac{(1-\beta\theta)(1-g)\beta r^l}{\Delta} + \frac{(1-\beta p)(1-p)[\gamma(\sigma-1)+1] - p\kappa}{\Delta} g \hat{G}^l \quad (\text{B-15})$$

$$\Delta = (1-\beta p)(1-p) - p\kappa \left[1 + \frac{N}{1-N}(1-g) \right] \quad (\text{B-16})$$

ここで、 $\Delta > 0$ であるものとする。なぜなら、 Δ が負の値を取った場合、実質金利を定常状態から乖離させるショック($r^l < 0$)があった場合に、 \hat{Y}^l が増加してしまう。そうすると、テイラールール²⁹により名目金利が引き上げられるため、確率的な推移以外の要因で経済がゼロ金利制約から離脱してしまう。今回は名目金利が固定のケースを考察するので、 Δ が負の値を取る状態は排除する。

ゼロ金利制約下における政府支出乗数は以下のとおりである。

$$\frac{d\hat{Y}^l}{d\hat{G}^l} = \frac{(1-\beta p)(1-p)[\gamma(\sigma-1)+1] - p\kappa}{\Delta} \quad (\text{B-17})$$

式(B-15)の右辺第1項の割引率が生産に与える影響を以下のように定義する。

²⁹ J.B.Taylor によって提唱された中央銀行の金利設定のルール。ここでは中央銀行が①あるインフレ目標(π^*)に実際のインフレ率(π_t)を近づける、および②潜在GDP(y_p)に実際のGDP(y_t)を近づける、という2つの政策目標を持っていると想定し、それらの目標を達成するように名目短期金利が設定される。齊藤・岩本・太田・柴田(2010)第17章などを参照。

$$\theta = \frac{(1 - \beta p)(1 - g)\beta r^l}{\Delta} \quad (\text{B-18})$$

(B-17)とゼロ金利制約下における政府支出乗数の(B-18)を用いて(B-15)書き換えて以下を得る。

$$\hat{Y}^l = \theta + \frac{d\hat{Y}^l}{d\hat{G}^l} g \hat{G}^l \quad (\text{B-19})$$

r^l と Δ の符号の仮定により、式(B-19)の右辺 1 項の θ は負の値を取るのでゼロ金利制約下においては θ は生産を押し下げる要因になる。そのため、論文の中では θ は生産コスト(Output cost)と呼称されている。この生産コスト θ がゼロ金利制約下における財政政策の効果を決定付ける最も重要なパラメータである。

生産コスト θ がゼロ金利制約下における財政政策の効果を考察する上で重要な意味を持つ理由は 2 つある。1 つは、尤もらしいパラメータの設定の上で θ が非常に高い負の値をとり得ることである。もう一点は、ゼロ金利制約下における政府支出乗数を以下のように書き換えると明確になる。

$$\frac{d\hat{Y}^l}{d\hat{G}^l} = \frac{(1 - \beta p)(1 - p)[\gamma(\sigma - 1) + 1] - p\kappa}{(1 - \beta p)(1 - g)\beta r^l} \theta \quad (\text{B-20})$$

つまり、ゼロ金利制約下における政府支出乗数の大きさは生産コストに依存する。Christiano et al. (2011) のパラメータ設定では、ゼロ金利制約下の財政乗数は 3.7 と標準的な財政乗数の値の 3 倍以上になっているが、それは生産コストが大きいことに起因する。

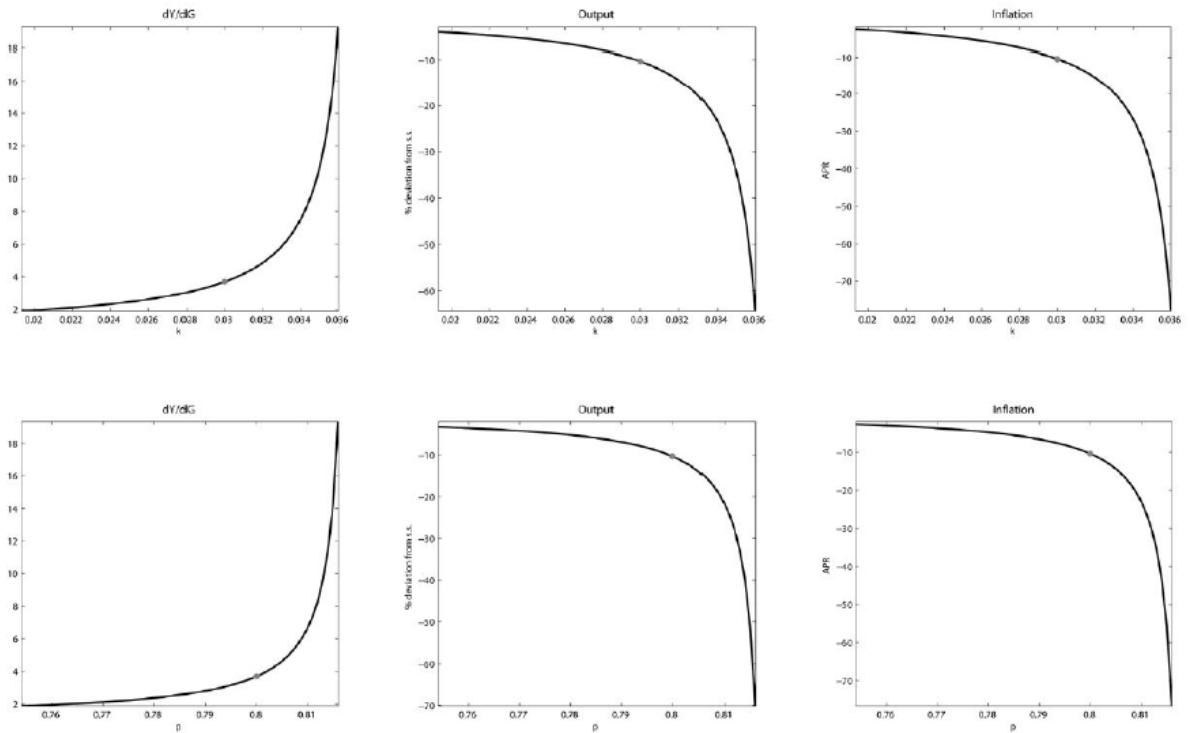
図 B-2 はゼロ金利制約下の財政乗数と生産、インフレーションのNKPCの係数 κ 、ゼロ金利制約の継続確率 p に対する感応度を表したグラフである。上段が κ 、下段が p に対する各変数の反応を図示したものである。

$\frac{\partial \kappa}{\partial \theta} < 0$ であることから、 θ の値が低い、つまり価格がより柔軟であるほど κ は大きな値を取る。

したがって、ゼロ金利制約下の生産(Y^l) は式(B-15)より θ の減少関数になる。これは、価格が柔軟であればよりデフレ期待になりやすい事実を表している。また、財政乗数は標準的なケースと同様に、価格の硬直性 θ に対して増加関数になっていることが確認できる。

一方で、ゼロ金利制約の継続期間 p も 同様の形状を描いている。つまり、ゼロ金利制約期間が長くなるにつれて財政乗数は大きくなり、生産は下落し、デフレ期待は増加する。

図 B-2 名目金利が一定の経済における政府支出に対する各変数のパラメータ感応度



(出所) Christiano et al.(2010)より抜粋

Christiano et al. (2011)に基づいて、前節までの DSGE モデルを名目金利が常にゼロ近傍に成約される状況に DSGE モデルを修正する場合には、中央銀行のルールを以下のように設定する：

$$R_t = \max(\tilde{R}_t, 1) \quad (\text{B-21})$$

$$\ln\left(\frac{\tilde{R}_t}{\bar{R}}\right) = \rho^r \ln\left(\frac{R_{t-1}}{\bar{R}}\right) + (1 - \rho^r) \left[(1 + \psi_\pi) \ln\left(\frac{\pi_t}{\bar{\pi}}\right) + \psi_y \ln\left(\frac{Y_t}{a_t \bar{Y}}\right) \right] + \varepsilon_t^r \quad (\text{B-22})$$

ここで、インフレ目標 ($\bar{\pi}$) は、名目金利の定常値 \bar{R} が 1 となるように設定する。この定常状態を初期値として、他のショック (財政政策ショック) を加えたときの金融政策ショック ε_t^r を操作し、常に $\tilde{R}_t = 1$ となるようにして、(B-21)の制約を擬似的に表現し、乗数を計算すれば良い。

<有識者へのヒアリング概要>

●第1回

(日 時) 2017 年 2 月 2 日 (木) 15 時～17 時

(場 所) 日本経済研究センター

(有識者) 西山 慎一 東北大学准教授

●第2回

(日 時) 2017 年 2 月 3 日 (木) 14 時～16 時

(場 所) 慶應義塾大学三田キャンパス

(有識者) 藤原 一平 慶應義塾大学教授

●第3回

(日 時) 2017 年 2 月 6 日 (月) 13 時 30 分～15 時 30 分

(場 所) 国土交通政策研究所 (中央合同庁舎第 2 号館 15 階)

(有識者) 平賀 一希 東海大学准教授

●第4回

(日 時) 2017 年 12 月 15 日 (金) 13 時 30 分～15 時 30 分

(場 所) 早稲田大学早稲田キャンパス

(有識者) 上田 晃三 早稲田大学教授

●第5回

(日 時) 2017 年 12 月 19 日 (火) 16 時 30 分～18 時 30 分

(場 所) 慶應義塾大学三田キャンパス

(有識者) 廣瀬 康生 慶應義塾大学教授

●第6回

(日 時) 2017 年 12 月 21 日 (木) 14 時 00 分～16 時 00 分

(場 所) 駒澤大学駒沢キャンパス

(有識者) 江口 允崇 駒澤大学准教授

<参考文献>

Aiyagari, S Rao, Lawrence J Christiano, and Martin Eichenbaum (1992) "The output, employment, and interest rate effects of government consumption," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 30, No. 1, pp. 73-86.

Altig, David, Lawrence J Christiano, Martin Eichenbaum, and Jesper Linde (2011) "Firm-specific capital, nominal rigidities and the business cycle," *Review of Economic dynamics*,

- Vol. 14, No. 2, pp. 225-247.
- Aschauer, D.A. (1989) "Is Public Expenditure Productive?" *Journal of Monetary Economics* 23, pp.177-200.
- Bailey, Martin J (1971) "National income and the price level." *Journal of Political Economy* 72, no. 6, pp.636-637.
- Bilbiie, F. O. (2009). "Nonseparable preferences, fiscal policy puzzles, and inferior goods" *Journal of Money, Credit and Banking*, 41(2 - 3), pp.443-450.
- Bilbiie, F. O. (2011). "Nonseparable preferences, Frisch labor supply, and the consumption multiplier of government spending: One solution to a fiscal policy puzzle" *Journal of Money, Credit and Banking*, 43(1), 221-251.
- Blanchard, O. J., & Kiyotaki, N. (1987). "Monopolistic competition and the effects of aggregate demand" *The American Economic Review*, pp.647-666.
- Barro, Robert (1989) "The Neoclassical Approach to Fiscal Policy," in Barro, R.ed. *Modern Business Cycle Theory*: Harvard University Press and Basil Blackwell Publishers.
- Barro, Robert J. (1981) "Output Effects of Government Purchases," *Journal of Political Economy*, Vol. 89, No. 6, pp. 1086-1121, Bank of Japan Working Paper Series.
- Batini, Nicoletta, Luc Eyraud, and Anke Weber (2014) "A Simple Method to Compute Fiscal Multipliers."
- Baxter, Marianne and Robert G King (1993) "Fiscal policy in general equilibrium," *The American Economic Review*, pp. 315-334.
- Blanchard, Olivier Jean and Kiyotaki, Nobuhiro (1987) "Monopolistic Competition and the Effects of Aggregate Demand" *The American Economic Review*, Vol. 77, No.4, pp. 647-666
- Blanchard, Olivier Jean and Danny Quah (1993) "The dynamic effects of aggregate demand and supply disturbances: Reply" *The American Economic Review*, Vol. 83, No.3, pp. 653-658.
- Boneva, L. M., Braun, R. A., & Waki, Y. (2016). "Some unpleasant properties of loglinearized solutions when the nominal rate is zero" *Journal of Monetary Economics*, 84, pp.216-232.
- Bouakez, H., & Rebei, N. (2007). "Why does private consumption rise after a government spending shock?" *Canadian Journal of Economics/Revue canadienne d'économique*, 40(3), pp.954-979.
- Cantore, C., Levine, P., Melina, G., & Yang, B. (2012). "A fiscal stimulus with deep habits and optimal monetary policy" *Economics Letters*, 117(1), pp.348-353.
- Christiano, Lawrence and Martin S Eichenbaum (1988) "Is theory really ahead of measurement? Current real business cycle theories and aggregate labor market fluctuations."
- Christiano, Lawrence J., Martin Eichenbaum, and Charles L Evans (2005) "Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy," *Journal of Political Economy*, Vol. 113, No. 1, pp. 1-45.
- Christiano, Lawrence, Martin Eichenbaum, and Sergio Rebelo (2011) "When Is the

- Government Spending Multiplier Large?" *Journal of Political Economy*, Vol. 119, No. 1, pp. 78-121.
- Corsetti, G., Kuester, K., Meier, A., & Müller, G. J. (2010). "Debt Consolidation and Fiscal Stabilization of Deep Recessions". *The American Economic Review*, 100(2), pp.41.
- Corsetti, Giancarlo, Andre Meier, and Gernot J. Muller (2012) "Fiscal Stimulus with Spending Reversals," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 94, No. 4, pp. 878-895, Federal Reserve Bank of Kansas City Working Paper.
- Eggertsson, Gauti B (2011). "What fiscal policy is effective at zero interest rates?". *NBER Macroeconomics Annual*, 25(1), pp.59-112.
- Eggertsson, Gauti B and Michael Woodford (2003) "Optimal monetary policy in a liquidity trap" Technical report.
- Erceg Christopher J., and Jesper Lindé. 2014. "Is There a Fiscal Free Lunch in a Liquidity Trap?" *Journal of the European Economic Association*, 12(1), pp.73-107.
- Erceg, C. J., Henderson, D. W., & Levin, A. T. (2000). "Optimal monetary policy with staggered wage and price contracts". *Journal of monetary Economics*, 46(2), pp.281-313.
- Evans, Paul and Georgios Karras (1994) "Are government activities productive? Evidence from a panel of US states," *The Review of economics and statistics*, pp. 1-11, National Bureau of Economic Research.
- Gali, Jordi, J. David Lopez-Salido, and Javier Valles (2007) "Understanding the Effects of Government Spending on Consumption," *Journal of the European Economic Association*, Vol. 5, No. 1, pp. 227-270.
- Hall, R. E. (2009). By how much does GDP rise if the government buys more output? (No. w15496). National Bureau of Economic Research.
- Holtz-Eakin, Douglas and Amy Ellen Schwartz (1995) "Infrastructure in a structural model of economic growth," *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 25, No.2, pp. 131-151, FRB of New York Staff Report.
- Iwata, Yasuharu. (2009) "Fiscal Policy in an Estimated DSGE Model of the Japanese Economy: Do Non-Ricardian Households Explain All?" ESRI Discussion Paper Series No.216.
- Iwata, Yasuharu. (2011) "The Government Spending Multiplier and Fiscal Financing: Insight from Japan." *International finance* 14, pp.231-264.
- Iwata, Yasuharu. (2013) Two fiscal policy puzzles revisited: New evidence and an explanation. *Journal of International Money and Finance*, 33, pp.188-207.
- Karras, Georgios (1994) "Government spending and private consumption: some international evidence," *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 26, No. 1, pp.9-22.
- Keynes, John Maynard (1936) *The general theory of interest, employment and money*
- Krugman, Paul R, Kathryn M Dominquez, and Kenneth Rogoff (1998) "It's baaack: Japan's slump and the return of the liquidity trap," *Brookings Papers on Economic Activity*, Vol. 1998, No. 2, pp. 137-205.
- Kydland, F. E., & Prescott, E. C. (1982). Time to build and aggregate fluctuations.

- Econometrica*, Vol. 50, No. 6, pp.1345-1370.
- Leeper, Eric M., Todd B. Walker, and Shu-Chun S. Yang (2010) "Government Investment and Fiscal Stimulus," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 57, No. 8, pp.1000-1012.
- Linnemann, L., & Schabert, A. (2006). Productive government expenditure in monetary business cycle models. *Scottish Journal of Political Economy*, 53(1), pp.28-46.
- Linnemann, Ludger (2006) "The effect of government spending on private consumption: a puzzle?" *Journal of Money, Credit, and Banking*, Vol. 38, No. 7, pp.1715-1735.
- Lucas, R. E. (1976, January). "Econometric policy evaluation: A critique". *Carnegie-Rochester conference series on public policy* (Vol. 1, 19-46). North-Holland.
- Mountford, Andrew and Harald Uhlig (2009) "What are the Effects of Fiscal Policy Shocks?" *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 24, No. 6, pp. 960-992.
- Nadiri, M Ishaq and Theofanis P Mamuneas (1994) "Infrastructure and public R&D investments, and the growth of factor productivity in US manufacturing industries," "Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Ramey, Valerie A (2009) "Identifying government spending shocks: it's all in the timing," "Technical report.
- Ravn, Morten, Stephanie Schmitt-Grohe, and Martin Uribe (2006) "Deep Habits," *The Review of Economic Studies*, Vol. 73, No. 1, pp. 195-218.
- Romer, D. (2011) *Advanced Macroeconomics* (4th ed.), McGraw-Hill/Irwin.
- Rotemberg, Julio J (1982) "Sticky prices in the United States," *The Journal of Political Economy*, Vol. 90, No. 6, pp. 1187-1211.
- Rothenberg, Thomas J (1971) "Identification in parametric models," *Econometrica*, Vol. 39, No. 3, pp. 577-591.
- Rubio-Ramirez, Juan F, Daniel F Waggoner, and Tao Zha (2010) "Structural vector autoregressions: Theory of identification and algorithms for inference," *The Review of Economic Studies*, Vol. 77, No. 2, pp. 665-696.
- Sargent, Thomas J (1989) "Two models of measurements and the investment accelerator," *The Journal of Political Economy*, Vol.97 pp.251-287.
- Schorfheide, Frank (2000) "Loss function-based evaluation of DSGE models," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 15, No. 6, pp. 645-670.
- Sims, Christopher A (2002) "Solving Linear Rational Expectations Models," *Computational economics*, Vol. 20, No. 1, pp. 1-20.
- Smets, Frank and Rafael Wouters (2003) "An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Area," *Journal of the European Economic Association*, Vol. 1, No. 5, pp. 1123-1175.
- Smets, Frank and Rafael Wouters. (2007) "Shocks and Frictions in US Business Cycles: Bayesian DSGE Approach." *American Economic Review* 97, pp.586-606.
- Woodford, M. (2011). Simple analytics of the government expenditure multiplier. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 3(1), pp.1-35.

- 岩本康志 (1990). 「日本の公共投資政策の評価について」、『経済研究』Vol.41 250-261.
- 江口允崇 (2011) 『動学的一般均衡モデルによる財政政策の分析』 三菱経済研究所
- 江口允崇 (2012) 「財政政策の効果はなぜ下がったのか？－ニューケインジアンモデルによる検証」 KEIO/KYOTO GLOBAL COE DISCUSSION PAPER SERIES DP2012-008
- 沖本竜義(2010)『経済・ファイナステータの計量時系列分析』朝倉書店.
- 加藤久和(2010)「政府支出が民間需要に及ぼす効果の検証」『政経論叢』第78巻第5・6号、167-206
- 加藤涼(2007)『現代マクロ経済学講義 動学的一般均衡モデル入門』東洋経済新報社.
- 川出真清・伊藤新・中里透(2004)「1990年移行の財政政策の効果とその変化」井堀利宏編『日本の財政赤字』岩波書店
- 厚生労働省(2009)『平成17年(2005年)産業連関表 労働誘発係数』.
- 国土交通省(2006)「社会資本ストックの経済効果に関する研究－都市圏分類による生産力効果と厚生効果－」『国土交通政策研究』第68号.
- 国土交通省(2009)『平成17年 建設部門分析用産業連関表』.
- 国土交通省(2014)『平成25年度国土交通白書』.
- 小塚匡文・平賀一希・藤井隆雄(2012)「財政政策とクラウドディング・アウトに関する実証研究：展望」『国民経済雑誌』第205巻第4号、71-82
- 近藤広紀・井堀利宏(1999)「最適社会資本・公共投資規模と民間消費の動向」『日本経済研究』第39巻8号、55-75
- 齊藤誠・岩本康志・太田聰一・柴田章久(2010)『NLAS マクロ経済学』有斐閣
- 酒井才介・小寺剛・荒木大恵・中澤正彦・石川大輔・中沢伸彦・神代康幸 (2015)「エッジワース補完性と財政政策の効果について：DSGEモデルによるアプローチ」KIER Discussion Paper Series No.1507
- 鈴木将覚(2006)「ニューケインジアン・フィリップス曲線(NKPC)からみた日米のインフレ圧力と金融政策へのインプリケーション」『みずほ総研論集』2006年1号
- 内閣府(2014)「国民経済計算確報(2013年度)」.
- 長町大輔 (2017) 「DSGEモデルの定式化」『PRI Review』65号
- 畑農鋭矢(1998)「社会資本とマクロ経済の生産能力」、『一橋論叢』No.119、106-124.
- 浜田浩児・堀雅博・花垣貴司・横山瑠璃子・亀田泰佑・岩本光一郎(2015)「短期日本経済マクロ計量モデル(2015年版)の構造と乗数分析」、ESRI Discussion Paper Series No.314.
- 福田慎・溜川健一 (2013)「動学的確率的一般均衡モデルの動向：モデル構築を中心に」『商学論集』第81巻第3号 43-60
- 二神孝一・堀敬一 (2017) 『マクロ経済学 第2版』 有斐閣
- 三井清・太田清(1995)『社会資本の生産性と公的金融』、日本評論社.
- 吉野直行・中島隆信(1999)『公共投資の経済効果』、日本評論社.
- 吉野直行・中野英夫(1996)「公共投資の地域間配分と生産効果」『フィナンシャル・レビュー』41、16-26.