付注１．期待効用理論について

Ross (1973)等にあるように、リスクのある変数 x に対しては、(1)式のような効用関数を設定する。

$$U(x) \qquad (1)$$

このうちで、期待効用理論においては、「人々が期待効用 $E[U(x)]$ を最大化するように行動する」という仮定をおく。ここで重要なことは、効用関数の形状によって、

x の期待効用≠x の期待値における効用

ということが生じているということである。さらに、確率変数 x の確率分布 p, q において、(2)式を満たす効用関数 $u(x)$を、von Neuman-Morgenstein 効用関数（以下 vNM 関数）と呼ぶこととする。

$$p \geq q \Leftrightarrow \int [u(x)p(x)]dx > \int [u(x)q(x)]dx \qquad (2)$$

① vNM 効用関数の定義

a)すべての $p, q(\in \mathrm{P})$について、 $p \geq q$ 又は $q \geq p$ が成立する。
b) $p \geq q$ かつ $q \geq r$ ならば、 $p \geq r$ である。
c) $p > q$ ならば、どの確率集合 r と定数 $a(0<a<1)$についても、

確率 a で p 確率 1－a で r の集合	>	確率 a で q 確率 1－a で r の集合

である。

d) $p>q>r$ のとき、次の①，②が成立する適当な数 $0<a, b<1$ が存在する。

① $ap + (1-a)r > q$

② $bp + (1-b)r < q$

以上の a)～d)の仮定が成立する関数を、von Neumann-Morgenstein 効用関数と呼ぶ。

②危険中立的な主体

vNM 効用関数において、危険中立的な主体の状態は、例えば以下のような関数で表される。

$$u(x) = ax + b \qquad (3)$$

のとき、

$$E[u(x)] = aE(x) + b \qquad (4)$$

であり、x の期待効用＝x の期待値における効用となっている。以下では、こうした主体について「危険中立的」であると表現することとする。

③危険回避的な主体

ところが、実際には人々は不確実性を嫌い、危険回避的な行動をとることが多い。そのような人々の効用は以下のように表すことができる。

今、確率 p で x_0 の収益、確率 1-p で x_1 の収益を得ることができるとすると、危険回避的な主体においては、同程度の期待収益であれば、変動の小さい方を選好するので、vNM 関数 $u(x)$は、

$$u(x_0) \cdot p + u(x_1) \cdot (1-p) < u(x_0 p + (1-p)x_1) \qquad (5)$$

を満たす。

さらに、(5)式のような関係が x のすべてについて成り立つとき、$u(x)$を「強凹関数（Strictly Concave Function）」と呼ぶ。

付注2．P-A問題の設定と効率的リスクシェアリング

Ross (1973), Stiglitz (1974), Grossman and Hart (1983), Anderlini and Felli (1993)などを参考に、このような問題の定式化を行うと、以下のようになる。

(1) 問題の設定

Principalの効用関数を$G(\cdot)$、Agentの効用関数を$U(\cdot)$とする。さらに、これらの効用関数$G(\cdot)$, $U(\cdot)$がvNM関数であり、Agentの行動を$a(a\in A)$とし、Agentの行動に依存する収益がqであり、行動aに依存しないランダムな環境をθとすると、

$$q(a,\theta) \qquad (6)$$

と表すことができる。また、Agentに対する支払関数Iは、

$$I = I(q(a,\theta);\theta) \qquad (7)$$

であり、Agentは、以下の条件を満たすように行動する。

$$\max_{a} \mathop{E}_{\theta}\left\{U\left[I(a,\theta);\theta\right]\right\} \qquad (8)$$

Principalは、賃金Iに対するAgentの行動について完全情報を持っていると仮定すると、以下の条件を満たすように賃金を設定する。

$$\max_{I} \mathop{E}_{\theta}\left\{G\left[q(a(I),\theta)-I(a(I),\theta);\theta\right]\right\} \qquad (9)$$

Agentは、以下の最低限の期待効用を得るように行動する。

$$\mathop{E}_{\theta}\left\{U\left[I(q(a,\theta);\theta)\right]\right\} \geq \overline{U} \qquad (10)$$

ここで、PrincipalとAgentは、θに関して同じ主観確率を持っているとし、収益のみに基づいて支払が行われるとすると、

$$I = I(q(a,\theta)) \qquad (11)$$

と置くことができる。

(2) 最適な賃金契約

ここで、PrincipalとAgentは、ウエイトづけされた効用の合計（期待値）を最大化するように賃金契約を結ぶこととする。

$$\max_{I} E\left\{G\left[q-I\right]+\lambda U\left[I\right]\right\} \qquad (12)$$

(12)式において、両者がリスク中立的である場合、最適な賃金契約は(13)式を満たすものになる。

$$G'\left[q-I\right]=\lambda U'\left[I\right] \qquad (13) \quad (\mathrm{P.E})$$

このように、Iはqの一次関数で表され、qの一定比率がIになるような賃金契約を結ぶことが最適であることとなる。

さらに、$\pi' = R\pi$かつ$q'R = q$であれば、qはq'と同じ平均を持つことから、

$$B'(a) = q'\pi'(a) = q'R\pi(a) = q\pi(a) = B(a) \qquad (14)$$

であり、定理より

$L' \geq L$　　である。

したがって、Agentの行動とPrincipalが報償を設定する際の目安としている産出量とのリンクが小さくなった場合、エージェンシー・コストが増大することになる。

付注3．インセンティブとリスクシェアリング

(1)問題の設定

依頼人（Principal）は代理人（Agent）を雇い、依頼人が行わない行動 a を代理人に行ってもらうとする。

Agent の行動 a に基づいて、産出 q_i が離散確率分布 π_i を介して発生するとする。

以下では、離散分布 π_i で収益が発生することを想定する。ここで Agent に対する報償を I とおき、リスク中立的である Principal の期待便益 $B(a)$ は以下の式で表される。

$$B(a) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a)(q_i - I_i) \qquad (15)$$

一方の Agent の行動を規定する上では、単純化のために以下の仮定１を導入する。

仮定１

Agent の効用関数は以下の通り。

$$U(a, I) = G(a) + K(a)V(I) \qquad (16)$$

・V は凹の増加関数

・$G>0, K>0$

・$a_1, a_2 \in A$ かつ $I_0, I_1 \in \eta$ のとき、

$G(a_1) + K(a_1)V(I_0) \geq G(a_2) + K(a_2)V(I_0)$

$\Rightarrow G(a_1) + K(a_1)V(I_1) \geq G(a_2) + K(a_2)V(I_1)$ である。

つまり、Agent は、どのような行動をとっていても報酬に対する評価は同じである。

仮定２

$V(I)$ は(16)式を満たす。

$$\left[\overline{U} - G(a)\right] / K(a) \in V(I) \quad \forall a \in A \qquad (17)$$

ここにおいて、Agent の行動を収益 q の最大化に向かわせるためには、収益 q と報酬 I の間に何らかの関係を持たせた契約を結ぶことが必要である。

i=1〜n の離散分布において

$$\pi_i \rightarrow I_i$$

という契約を結んだとすると、Agent は、

$$\max_a \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a)U(a, I_i) \qquad (18)$$

のように行動する。

これら一連の問題を設定すると、以下のように描くことができる。

$$\max_I \sum_{i=1}^{n} V_i(\pi_i(a)(q_i - I_i))$$

$$s.t. \max_a \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a)U(a, I_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i(a^*)U(a^*, I_i) \geq \overline{U} \qquad -(19)$$

であるとする。ただし、$I(a, y) \geq 0$ とする。

このうち、(18)の第１式はPrincipalの最適化条件であり、Agentの行動にもとづいて自らの期待効用を最大化することを表す。次の第２式は Agent が与えられた報償契約の中で、自らの効用を最大化するように行動 a を選択することを表す。最後の第３式は、Agentにとっての最適な期待効用が、他で雇用された場合の期待効用水準より低い場合は契約が成立しないという（参加条件）を規定している。

ここで、Principal は Agent が行動 a^*をとってくれることを望んでいるとすると、(18)式は仮定１を用いて以下のように書き換えることができる。

$$\min_{I} \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a^*)h(v_i)$$

s.t.

$$G(a^*)+K(a^*)\left(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(a^*)v_i\right)$$
$$\geq G(a)+K(a)\left(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(a)v_i\right) \quad for\, all\, a$$

$$G(a^*)+K(a^*)\left(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(a^*)v_i\right)\geq \overline{U} \qquad \text{-(20)}$$

ここで $h\equiv V^1$（h は V の逆関数）である。この不等式は、Kuhn-Tucker の条件により解を持つことになる。

仮定３

すべての a, i について、

$\pi_i(a)>0$　　であるとする。

また、最善コスト C_{FB} は、は以下の式で定義されるとする。

$$C_{FB}(a)=h(\left[\overline{U}-G(a)\right]/K(a)) \qquad (21)$$

(2) 導出される定理

定理１

仮定１～３を満たす場合、

次善の行動 a 及び次善の報償契約 I が存在する[39]。

証明

(i)Vが線形の場合：リスク中立の場合

$B(a)-C_{FB}(a)$ を最適化する a を a^*とおく。このとき Principal は報償契約を

$$I_i=q_i-(B(a^*)-C_{FB}(a^*)) \qquad (22)$$

のように設定する。これは、Principal の収入は Agent の行動がどのようなものであっても、一定とするものであるが、このとき、Agent は最適行動 a^*をとる。したがって、Agent がリスク中立的である場合、次善解は常に存在する。

(ii)Vが非線形の場合：リスク回避の場合

制約条件が a^*について空集合でない場合、(9)式は解を持つことになる。

$\min_{I} \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a^*)h(v_i)$ が $C(a^*)$の最小化を満たす場合

また、$C(a)$は a についての下半連続対応であるとする。下半連続対応とは、「点 x_0 から x を少

し動かすとき、$F(x)$が急に小さくならない」ことを示す。
つまり（I_1………I_n）は離散分布であり、

$$C(a) \le \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a) I_i = \lim_{r\to\infty} C(a_r) \quad (23)$$

となる。このように $C(a)$が有限で a についての下半連続対応であり、行動 a の集合 A が閉集合であるとき、

$$\max_{a\in A}\left[B(a) - C(a)\right] \quad (24)$$

は解を持つことになる。　Q.E.D

定理２

仮定１，２を仮定し、$K(a)$が一定であるか $G(a)=0$ の場合、

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i(a') U(a', I_i') = \overline{U} \quad (25)$$

が成立する。

証明

$$G(a') + K(a')(\sum_{i=1} \pi_i(a') V(I')) > \overline{U} \quad (26)$$

であることを想定した場合、(20)式の制約条件を満たしつつ、支払費用を削減できる。したがって、(26)式は次善の条件を満たさないことになる。

Q.E.D.

これは、(i)$K(a)$が一定である：行動 a と報酬とがリンクしない、(ii)$G(a)=0$：行動 a そのものが Agent の効用に影響を与えない（努力の不効用がない）、というどちらかの状況がある場合に、リスクシェアリングとインセンティブの関係においてトレードオフが成立しないことを示している。

また、一般には、K(a)が一定でなく $G(a)=0$ でなければ、一つ以上の最適解があることになるが、V が強凸関数であるならば、唯一の次善解が存在することとなる。

定義

sup（・）を次善解とすると、

$$L = \max_{a\in A}(B(a) - C(a)) - \sup_{a\in A}(B(a) - C(a)) \quad -(27)$$

L は最善と次善の間の差とする。

定理３

仮定１，２，３が成立し、a*を $B(a) - C_{FB}(a)$ を最大化する a とすると、

$C_{FB}(a^*) > \min_{a\in A} C_{FB}(a)$ であり、

V が強凸関数である場合、L＞０となる。

証明

V が強凸関数であり、I_iが一定でない場合、期待効用の性質より、

$$C(a^*) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a^*) h(V(I_i)) > h\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(a^*) V(I_i)\right) \qquad (28)$$

が導かれる。

さらに、Agentの参加条件

$$G(a^*) + K(a^*) \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a^*) V(I_i) \geq \overline{U} \quad (29)$$

を用いると、

$$h\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(a^*) V(I_i)\right) \geq h\left((\overline{U} - G(a)) / K(a^*)\right) = C_{FB}(a^*) \qquad (30)$$

が導かれる。

したがって、(27), (29)式より

$$C(a^*) > C_{FB}(a) \qquad (31)$$

である。 Q.E.D

定理３は定理２と逆に、最善解においてはすべてのリスクをPrincipalがとることになるが、そこには、努力するインセンティブが生じず、ロスが発生するという状況を表している。インセンティブが生じない場合、Agentは努力しないこととなり、次善解は最善解よりも悪い状態となる。

したがって、Agentが危険回避的な行動をとり、Agentの努力水準を完全にモニターすることができない場合、一般には効率的リスクシェアリングとAgentへの適切なインセンティブづけとは両立し得ないこととなる。

付注４．エージェンシー・コストが拡大する状況

以上のようなエージェンシー・コストは、一定の状況の下で拡大する。その中でも、努力水準に対してリスクがある場合について、Grossman and Hart (1983)等をもとに検討する。
ここで、これまで論じてきたP-A問題をケース１とし、ランダム変数 R が収益 q に影響を与え、a と q の関連性が小さくなっているP-A問題をケース２（係数に '（ダッシュ）を付ける）とする。

定理４

ここで仮定１～３が成立しているとすると

$$C'(a) \geq C(a) \qquad for\ all\ a \qquad (32)$$

であり、さらに V が強凸関数であり、かつランダム変数 R が厳密に正であれば、

$$C_{FB}(a^*) > \min_{a \in A} C_{FB}(a) \quad かつ$$

$$C(a^*) < \infty \Rightarrow C'(a^*) > C(a^*) \qquad (33)$$

である。

証明

ランダムな影響があった場合に Agent が行動 a をとるようにさせる契約の中で、費用が最小の報酬の集合を

$$I_j' \quad (j=1,\cdots,n)$$

とする。ここで、ランダムな影響がない場合を想定して Agent の行動が q_i であるとき、n－面のサイコロのうち、j 面がでる確率が r_{ij} であった場合、（r_{ij} は R の(j, i)成分）j 面がでれば、I_j'を得ることができる。このとき、特定の行動下において I_j'を得ることができる確率は当初と変わらない。さらに、Principal の期待費用は当初と変わらない。したがって、このような状態にあっては、Agent は行動 a を変えようとはしない。
これは、ランダムな影響がない場合は、ランダムな影響がある場合に比べて、少なくとも同じだけ安い費用で行動 a を行わせることができることを示している。
この証明の最後の部分は、Principal にとっては、Agent に特定の効用水準

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ji} V(I_j') \qquad (34)$$

を保証する方が、同様の効用水準を保証しつつ小さい期待値の支払で済ますことができることを示している。

Q.E.D

さらに、$\pi' = R\pi$ かつ $q'R = q$ であれば、q は q'と同じ平均を持つことから、

$$B'(a) = q'\pi'(a) = q'R\pi(a) = q\pi(a) = B(a) \quad (35)$$

であり、定理より

$$L' \geq L \qquad である。$$

したがって、Agent の行動と Principal が報償を設定する際の目安としている産出量とのリンクが小さくなった場合、エージェンシー・コストが拡大することになる。

付注5. レバレッジによるリスクの増大[41]

公的事業のバランスシート（概念図）

事業の市場価値 V	自己資本の市場価値 S
	負債の市場価値 B

X＝事業収益（債券利子支払前利益）
r ＝金利
N＝発行済株式数

事業収益Xに対する自己資本一単位あたりの収益(ROE)は、

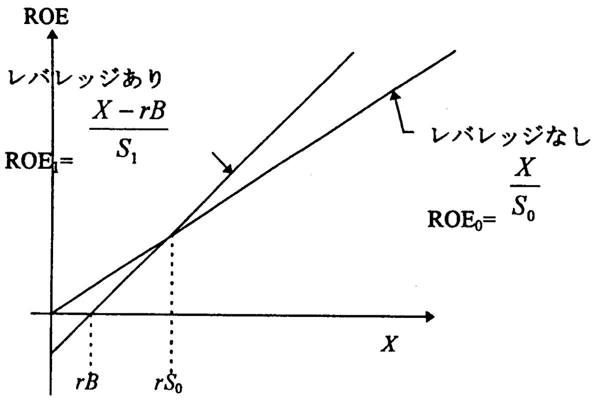
(i)レバレッジを利用しない (B_0=0)場合　　ROE $_0$=X/S_0

(ii)レバレッジを利用する (B_1>0)場合　　ROE $_1$=(X－rB$_1$)/S$_1$

である。

ここで、事業収益Xの変動を考慮すると、自己資本一単位あたりの収益(ROE)は下図のように表される。

図 1-18　Xの変動によるROEの変動



ROE_1>ROE_0の場合、

$\frac{X-rB}{S_1} > \frac{X}{S_0}$において$S_1$＝$S_0$ －Bであり、S_0 (X－rB)>X(S_0－B) >であるので$\frac{X}{S_0}$ > rである。

レバレッジした場合の自己資本１単位あたりの収益は、事業全体の収益率が利子率よりも高い場合には、レバレッジしない場合よりも大きくなるが、収益率が利子率よりも小さくなると逆に小さくなる。つまり、レバレッジを行った場合には、収益率が利子率に見合わないものになったときに、レバレッジをしない場合に比べて、より大きな損失が発生することになる。

[41] この部分の記述は、仁科(1997)等に基づき作成した。