第 3 章付録

第３章付録

東京大学大学院経済学研究科教授　　井堀 利宏

１ 最善解でのルール

1-1 分析の枠組み

もし、政府が家計の貯蓄率を何らかの政策変数で操作できる（たとえば、異時点間での課税・補助金政策により家計の貯蓄・消費計画に影響を与えることができる）のであれば、政府は公共投資と同様に、民間消費と民間投資の間の資源配分も操作できるから、最善解が実現する。この場合の公共投資の最適ルールについて考えてみよう。

経済全体の生産関数は，次のように与えられる。

(１)　　$y = f(k, g)$

ここで、y は生産、k は民間資本、g は公共資本である。労働供給は外生的に与えられ、その労働供給が完全雇用されるように賃金率が調整されている。簡単化のために、労働供給は成長せず、1 に基準化されている。したがって、y, k, g は経済全体のマクロの量であるとともに、一人あたりの量でもある。

政府は所得のうち一部を一括固定税 h として徴収し、その財源で公共投資をして、公共資本を増加させる。

(２)　　$Dg = h$

ここで、D は時間に関する微係数を意味する。

民間資本の蓄積は、家計の貯蓄によりなされる。家計は、可処分所得 $y-h$ のうち一定割合を消費に回し、残りを貯蓄する。家計の貯蓄性向を s $(0 < s < 1)$ とすると、民間資本の蓄積式は次式となる。

(３)　　$Dk = s(y-h)$

1-2 政府の目的

さて、政府の目的は、無限の先までの効用の割引現在価値の最大化であるとしよう。公共資本は生産にのみ影響し、家計の消費には直接影響しないから、瞬時的な効用 u は家計の消費量 c にのみ依存する。社会的な時間選好率を ρ とおくと、政府の目的関数は、次式となる。

(４)　　$W = \int_0^\infty u(c)e^{-\rho t}dt$

したがって、政府の最適問題　は、(１)(２)(３)式の制約のもとで、(４)式を最大にするように、h、s を選択することである。租税と民間資本の最適な経路が与えられれば、それに応じて最適な公共投資と公共資本ストックも決められる。

1-3 最適条件

この問題の最適条件は、次の４式で与えられる。

(5)　$-u'(1-s)-s\lambda+\gamma=0$

(6)　$D\lambda=\rho\lambda-\gamma f_k$

(7)　$D\gamma=(\rho-f_g)\gamma$

(8)　$\lambda=u'$

ここで、λは民間資本の蓄積式(3)に関するラグランジュ乗数であり、民間資本ストックの社会的限界評価を示す。同様に、γは公共資本の蓄積式(2)に関するラグランジュ乗数であり、公共資本の社会的限界評価を示す。これらは、それぞれの資本がある時点で限界的に変化したときの社会的評価関数の変化を示すもので、「シャドー・プライス」とも呼ばれる。また、f_k、f_gはそれぞれ、民間資本、公共資本の生産における限界生産を意味する。

(8)式を、(5)(6)(7)式に代入すると、公共投資の最適条件式は次のようになる。

(9)　$f_g=f_k=\rho-Dcu''/u'$

ここで、$\{\rho-Dcu''/u'\}$は社会的時間選好率から消費の成長にともなう限界効用の逓減率を引いたものであり、「消費の利子率（あるいは収益率）」と呼ばれている。

最善解では、公共投資の割引率は、民間資本の利子率と等しく、またそれは消費の利子率とも等しい。完全な資本市場が存在し、その均衡利子率で消費者は時間選好率と利子率が等しくなるように消費・貯蓄の意思決定をおこない、また企業はその利子率と投資の限界生産が等しくなるように投資決定をする世界では、公共投資の割引率は市場利子率で与えられる。

2 次善解での最適ルール：アロー・クルツ・モデル

2-1 分析の枠組み

公共投資の最適ルールの古典的なモデルである Arrow=Kurtz(1970)のモデルを、定式化しよう。ここではsは外生的に所与であり、政府はそれを操作できないものとする。

2-2 最適条件

この問題の最適条件は、次の３式で与えられる。

(5)　$-u'(1-s)-s\lambda+\gamma=0$

(6)　$D\lambda=\rho\lambda-\gamma f_k$

(7)　$D\gamma=(\rho-f_g)\gamma$

これら３式の経済的意味をみておこう。(5)式を書き直すと、$u'(1-s)+s\lambda=\gamma$となる。この右辺は、租税によって家計の所得を減少させて、公共資本を蓄積することの

社会的な限界便益を意味する。左辺は、その社会的な限界費用を意味する。すなわち、可処分所得の減少による消費の減少のコスト$u'(1-s)$と、可処分所得の減少による貯蓄の減少の結果民間資本が減少するコスト$s\lambda$の合計が、社会的な限界費用となる。この２つが一致するように、最適な租税政策が実施されなければならない。(６)(７)式は、２つのストック変数に関するラグランジュ乗数が満たすべき条件を示している。(６)式を書き直すと、$D\lambda+\gamma f_k=\rho\lambda$となる。この式の左辺は民間資本の限界便益を示し、右辺は限界費用を示す。左辺第１項は評価価格の変化によるキャピタル・ゲインを示し、第２項は(５)式を考慮すると、民間資本の限界生産の社会的な価値を示す。右辺は民間投資の単価λに割引率ρをかけたものであり、民間投資の単位あたりの費用を意味する。(７)式の公共資本についても同様に解釈できる。

２-３ 公共投資の割引率

このモデルで、公共投資の割引率について考えてみよう。(７)式より、

(１０)　$$f_g=\rho-D\gamma/\gamma$$

となる。公共投資は、公共資本の限界生産が社会的な時間選好率と公共投資のシャドー・プライスの変化率との差額に等しいように、行われるのが最適となる。いいかえると、公共投資の割引率は社会的時間選好率とシャドー・プライスの変化率との差で与えられる。

(５)(６)式を用いてシャドー・プライスの変化率を書き直すと、次式を得る。

(１１)　$$f_g=\{\rho-Dcu''/u'\}u'(1-s)/\gamma+f_k s$$

u'/γは消費の利子率を生産物の単位に変換することを意味する。右辺の第２項のf_kは、民間投資の利子率（あるいは収益率）である。したがって、(１１)式は、公共投資の収益率が、消費の収益率と民間投資の収益率の$(1-s)$対sでウェイトした加重平均に等しくなることを示している。

公共投資を行うことで、現在の消費と民間投資が犠牲になるが、それらの限界的な値は、消費の場合には消費の利子率で、民間投資の場合には民間投資の利子率で測られる。両者の利子率は一般的には一致しない。そのとき、公共投資の割引率は、両方の利子率の加重平均で与えられる。ただし、定常状態では$Dc=0$であり、公共投資の割引率は民間投資の割引率＝消費の割引率に等しい。

３ 公共投資と有限期間の最適化

３-１ 分析の枠組み

市場経済において家計が自らの生存期間の範囲内でのみ異時点間の最適化行動を行っている場合について、公共投資の最適ルールをみておこう。

現在と将来の２期間からなるモデルを想定しよう。代表的個人の効用は、現在の消費c_1と将来の消費c_2に依存する。$u = u(c_1, c_2)$。第１期の期首に利用可能な資源は一人あたりRであり、これがその期に消費c_1か民間投資i_kか公共投資i_gに向けられる。

(１２)　　$R = c_1 + i_k + i_g$

民間部門、公共部門それぞれの投資による生産量は、$f(i_k)$、$g(i_g)$という生産関数で決まるものとしよう。したがって、第２期の消費は次式で与えられる。

(１３)　　$c_2 = f(i_k) + g(i_g)$

単純化のために、民間部門と公共部門は同一の財を生産していると考える。

このような経済での最適問題は、代表的個人の生涯についての効用を(１２)(１３)式の制約のもとで最大にするように、公共投資と民間投資、第１期と第２期の消費の配分を決めることである。最適条件式は次のようになる。

(１４)　　$f' - 1 = u_1 / u_2 - 1 = g' - 1$

すなわち、公共投資の収益率$g' - 1$は、民間投資の収益率$f' - 1$と消費の時間選好率$u_1 / u_2 - 1$とに等しい。市場では利子率が成立し、消費者はその利子率のもとで時間選好率が利子率に等しくなるように、消費・貯蓄の選択を行い、企業は私的投資の収益率がその利子率に等しくなるところまで投資を行い、政府は公共投資の収益率が市場利子率に等しくなるように投資計画を実施すれば、最適な配分が実現できる。

２期間で世界が終わりになるモデルでは、家計の計画期間と経済の存在期間とが同じになる。これは、事実上家計が無限期間存在しているケースとみなすこともできる。その意味で、１での最善解と同じ結論が成立するのは、当然であろう。

３-２　資本市場の不完全性

Sandmo=Dreze(1971)や Marchand=Pestieau(1984)などが分析した投資収益に対する利子課税を想定しよう。企業の最適化条件は、rを市場利子率とすると、$r = f'$となるが、家計の最適化条件は利子所得税率をτとすると、$r(1-\tau) = u_1 / u_2$となる。これら２式より、$f' = u_1 / u_2 \cdot 1/(1-\tau)$が成立する。この式を(１２)(１３)式同様に、モデルの制約条件として公共投資に関する最適問題を解くと、次善解として、(１４)式の代わりに次式を得る。

(１５)　　$g' = \{1 - a_2 / a_1\} u_1 / u_2 + \{a_2 / a_1\} f'$

ここで、a_1、a_2は$f' - u_1 / u_2 \cdot 1/(1-\tau)$をそれぞれ i_kとi_gで微分した値である。(１５)式

が意味するように、次善解では、公共投資の最適な割引率は家計の限界代替率と企業の投資収益率との加重和になる。公共投資は民間投資と消費を犠牲にするから、民間投資を限界的に抑制する部分は民間投資の収益率で、また、現在消費を抑制する部分

は消費の限界代替率で、それぞれ評価することが必要となる。

4 世代モデルでの社会的割引率

4-1 分析の枠組み

これまで説明してきたように、公共投資の最適な割引率は、資本市場の状態や政府の利用可能な財源調達手段と大きく関係している。この問題をより深く分析するために、経済成長を考慮した世代重複モデルを用いて、かつ労働供給を内生化して、最適な公共投資のルールをモデル化しよう。

まず、経済の集計された生産関数を次のようにまとめる。政府はgだけの公共資本を所有し、それが次のような生産関数に入るものとする。

(16) $y_t = f(k_t, g_t)$

ここで、y_tは労働単位あたりの産出、k_tは民間部門の資本労働比率、g_tは公共部門の資本労働比率である。公共投資は生産能力を増加させるが、直接には消費的な便益をもたらさないと想定している。

完全競争市場では、利子率r_tは民間資本の限界生産f_kに等しくなる。

(17) $f_k(k_t, g_t) = r_t$

単純化のために、残りの生産物は労働者に分配されると考えよう。したがって、賃金率w_tは

(18) $y_t - r k_t = w_t$

となる。

これら３式より、w と k はそれぞれrとgの関数として求められる。

(19) $w_t = w(r_t, g_t),\ w_r = -k,\ w_g = f_g$

(20) $k_t = k(r_t, g_t),\ k_r = 1/f_{kk},\ k_g = -f_{kg}/f_{kk}$

もし公共資本と民間資本が補完的であれば、$f_{kg} > 0,\ k_g > 0$であり、逆に、代替的であれば、$f_{kg} < 0,\ k_g < 0$である。資本は減耗せず、政府の経常的な支出はないものとする。

すべての個人は同質である。彼らは２期間生存し、青年期に働き労働所得を得て、消費するとともに、老年期のために貯蓄する。老年期には引退して、青年期の貯蓄を資産としてそれをすべて消費し、遺産は残さない。人口は一定である。t期の代表的個人の効用関数は、$u(c_t^1, c_{t+1}^2, L_t)$である。ここで、c_t^1は第１期の消費量、c_{t+1}^2は第２期の消費量、L_tは第１期の労働供給量である。

公共投資の財源として一括固定税ではなく、撹乱的な効果をもち得る２つの所得税を想定する。すなわち、消費者は青年期に労働所得税(γ)を、また老年期に資本所得税(θ)を支払う。したがって、世代tの家計のそれぞれの期の予算制約式は、次のように

なる。

(２１)　$c_t^1 = (1-\gamma) w_t L_t - s_t$

(２２)　$c_{t+1}^2 = [1 + r_{t+1}(1-\theta_{t+1})] s_t$

これら２式より、彼（彼女）の生涯にわたる予算制約は、

(２３)　$q_t^1 c_t^1 + q_{t+1}^2 c_{t+1}^2 + q_t^3 x_t = 0$

となる。ここで、$x = -L$ は第１期のネットのレジャーであり、$q_t = (q_t^1, q_{t+1}^2, q_t^3)$ は世代 t の消費者価格ベクトルである。

(２４-１)　$q_t^1 = 1$

(２４-２)　$q_{t+1}^2 = 1/[1 + r_{t+1}(1-\theta_{t+1})]$

(２４-３)　$q_t^3 = (1-\gamma_t) w_t$

民間資本市場の均衡条件は、次のようになる。

(２５)　$s_t = k_{t+1} L_{t+1}$

ここで、$k_{t+1} L_{t+1}$ は $t+1$ 期における労働者一人当たりの資本ストックである。t 期の財市場の均衡条件は、

(２６)　$c_t^1 + c_t^2 + k_{t+1} L_{t+1} + g_{t+1} L_{t+1} = w_t L_t + r_t k_t L_t + k_t L_t + g_t L_t$

である。また、t 期の政府の予算制約式は次のようになる。

(２７)　$\gamma_t w_t L_t + \theta_t r_t k_t L_t + g_t L_t = g_{t+1} L_{t+1}$

この式は、次のようにも変形できる。

(２８)　$t_t^2 c_t^2 + t_t^3 x_t = g_t x_t - g_{t+1} x_{t+1}$

ここで、t_i は有効税額であり、

(２９-１)　$t_t^2 = \theta_t r_t k_t L_t / c_t^2 = q_t^2 (1 + r_t) - 1$

(２９-２)　$t_t^3 = -\gamma_t w_t = q_t^3 - w_t$

で与えられる。この税額 t_i は消費者価格 q_i と生産者価格とのギャップに対応している。

４-２ 支出関数アプローチ

さて、以前の章でも用いた支出関数を使って、以上のモデルを書き直してみよう。まず家計の効用最大化行動を集約する式として

(３０)　$E(q_t, u_t) = 0$

が得られる。次に、民間部門の資本蓄積式として

(３１)　$q_{t+1}^2 E_2(q_t, u_t) = w_r(r_{t+1}, g_{t+1}) E_3(q_{t+1}, u_{t+1}))$

が得られる。最後に、財市場の均衡条件として

(３２)
$$\begin{aligned} &E_1(q_t, u_t) + E_2(q_{t-1}, u_{t-1}) - g_{t+1} E_3(q_{t+1}, u_{t+1}) + g_t E_3(q_t, u_t) \\ &+ w_r(r_{t+1}, u_{t+1}) E_3(q_{t+1}, u_{t+1}) + [w(r_t, g_t) - (1 + r_t) w_r(r_t, g_t)] E_3(q_t, u_t) = 0 \end{aligned}$$

が成立している。ここで、E_i はそれぞれ、青年期の消費、老年期の消費、青年期のネットのレジャーの補償需要関数であり、$q_1 E_1 + q_2 E_2 + q_3 E_3 = E$ の関係がある。

4-3 最適条件

政府は現在から無限の先までの各世代の効用の割引現在価値を最大にするように、税率と公共投資を決定する。社会的な割引率をρ、社会的 な割引要因を$\beta(=1/(1+\rho))$とすると、q_2（あるいはθ)、q_3(あるいはγ）、gに関する最適条件は、定常状態では次のようにまとめられる。

(33)　$\beta e_2 \varepsilon_{22} + e_3 \varepsilon_{23} = \lambda + 1 - \beta(1+r)$

(34)　$\beta e_2 \varepsilon_{32} + e_3 \varepsilon_{33} = \lambda$

(35)　$f_g = \rho$

ここで、e_iは有効税率(t_i / q_i)、ε_{ij}は財iの消費者価格q_jに関する補償需要の価格弾力性、$\lambda = \lambda_1 / \lambda_2$は最適問題のラグランジュ乗数の比である。すなわち、λ_1は撹乱的な税収で調達された一括の移転支出が青年期の世代の個人に行われた際の限界的な便益を示している。静学的な枠組みではこの乗数は必ず負になるが、本節のモデルのような動学的な体系ではプラスになることもあり得る。また、λ_2は政府支出一定のもとで税負担が限界的に減少したことの便益であり、プラスである。

上の条件より、公共投資の割引率は社会的な割引率ρで与えられる。また、労働所得税、資本所得税に関する最適条件は、静学的な枠組みでのラムゼイのルール（割引要因βが入っている点が異なる）と経済成長のモデルで標準的な最適条件である動学的な黄金率のルールの２つのルールから成り立っている。

もし、政府にとって公共投資を調達する手段として、世代別の一括固定税が利用可能であれば、$\lambda = 0$となり、資本所得税、労働所得税ともに必要がなくなる。このときは、

(36)　$r = \rho$

も成立する。したがって、上の条件とあわせると、

(37)　$f_k = f_g = \rho$

が成立する。これは、２つの資本の限界生産がともに一致していることを意味している。

$r = \rho$という条件は、動学的な最適化の条件である黄金率に対応している。「黄金率の条件」とは、定常状態での消費量を最大にする資本蓄積水準を意味している。２つのタイプの一括固定税が利用可能であれば、この条件は成立し、最善解が実現する。しかし、政府が世代間で再分配をする目的だけに一括固定税が利用される場合、あるいはその目的に限定して公債が発行される場合には、公共投資に必要な税収を一括固定税で徴収することはできず、撹乱的な労働、資本所得税が必要となる。そのような次善の状態でも、動学的な効率化のために一括固定税や公債発行が利用されるために、上の黄金率は成立する。公共投資の割引率は民間投資の割引率と一致する。民間部門での家計の最適化行動が２期間に限定されている場合でも、一括固定税が利用可能であれば、政府はそれを通じて動学的な最適経路を実現できるから、民間部門で形成さ

れる市場利子率は公共投資の割引率として有益な情報を与える。

しかし、世代間の再分配のために一括固定税が利用できないより一般的なケース（この節で対象としたケース）では、上の黄金率の条件は成立しない。あるいは、無理に黄金率の条件を成立させるように経済成長の経路をコントロールすると、そのために用いられる撹乱的な税負担の悪影響の方が大きくなって、かえって経済厚生は悪化してしまうのである。その結果、公共投資の割引率と民間投資の割引率とは乖離する方が望ましい。

4-4　２つの資本の収益率の比較

そのような一般的な場合には、上の３つの条件より

(３８)　$$f_g - f_k = e_2(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{32}) + (1+\rho)e_3(\varepsilon_{23} - \varepsilon_{33})$$

が得られる。公共投資の限界生産と民間投資の限界生産との乖離は、レジャーの価格弾力性ε_{33}が大きいほど、また、将来消費の価格弾力性の絶対値$-\varepsilon_{22}$が小さいほど、大きくなる。クロスの代替効果がなければ$(\varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} = 0)$、かつ、資本所得税と労働所得税がともに課せられるのが最適であれば、$e_2 > 0,\ e_3 < 0$あるから、上の式の右辺がプラスになるのは$-e_3\varepsilon_{33}$の方が$-e_2\varepsilon_{22}$よりも大きい場合であり、逆に場合はマイナスになる。公共資本の限界生産が民間資本の限界生産よりも大きいところが最適となるのは、価格弾力性の割には労働所得税の方が資本所得税よりも重く課税されているケースである。このとき、部門間の資本の最適配分の条件からみれば、相対的に民間資本を優遇するような配分、すなわち、民間資本の割引率を公共資本の割引率よりも低めに設定するのが望ましくなる。

参考文献

Arrow, K.J., and M. Kurtz(1970). *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, The Johns Hopkins University Press.

Marchand, M. and P.Pestieau(1984). “Discount rates and shadow prices for public investment”, *Journal of Public Economics* 24, pp.153-170.

Sandmo, A. and J.H.Dreze,(1971). “Discount rate for public investment in closed and open economies”, *Economica* 38, pp.395-412.