DSGE モデルの定式化

政策分析官　長町　大輔
（総合政策局情報政策課建設経済統計調査室長）

1　はじめに

マクロ経済理論の最近の潮流をふまえ、現在、国土交通政策研究所においては、経済分析に資するＤＳＧＥ体系のマクロ経済モデルの開発に取り組んでいる。

本稿では、このモデルの開発のための第一歩として行った標準的なＤＳＧＥニューケインジアンモデルの定式化の試みについて、式展開も含めできる限り厳密かつ丁寧に論じることとする。

2　Prototypical なニューケインジアンモデルの定式化

マクロ経済の数量的分析を行うという動きは、1970 年代に始まったものであるが、「従来型のいわゆるマクロ計量モデル（過去のデータから推定されたモデル）と呼ばれるものについては、推定された構造パラメータの値（例えば限界消費性向）がミクロ経済学的基礎に基づいていないため、経済政策の実施によって変化する可能性があり、これを不変のものとして政策分析を行うことはできない」というルーカス批判（Lucas(1976)）以降、家計等経済主体の効用・利潤最大化行動が明示的に反映されるようなミクロ的な基礎をもつマクロ経済モデルの開発が目指されるようになった（ミクロ的な基礎をもつモデルのパラメータは、人々の効用関数や企業の生産関数といった経済のより深いところに関係するものであるため、政策の影響から独立であろうとの前提により「ディープパラメータ」と呼ばれる）。

このようななか、現在、マクロモデルの主流になってきたのがＤＳＧＥモデル（動学的確率的一般均衡モデル。Dynamic Stochastic General Equilibrium Model）である。これは将来の経済状態を考慮しながら家計や企業が最適な行動を選択し、各時点で市場取引が成立するモデルで、技術ショックや政策ショックのような確率的な要素を含むものである。元々はＲＢＣモデル（Real Business Cycle Model）という完全競争・完全情報の下での経済活動を前提としたモデルであった。このため、短期の経済動学を分析するにあたっては、さまざまな市場の「摩擦」を考慮する必要が生じる。

今回、当所においては Prototypical な（標準形の）ＤＳＧＥモデルの概要を以下のとおり設定した。具体的には、近年、ＦＲＢ、ＩＭＦ、日銀などの機関で標準的な分析ツールとなっているニューケインジアンモデルという体系に分類されるもので、①家計の異時点間の最適化行動の反映、②独占的競争モデル・硬直価格モデルによるイ

ンフレ率の内生化[1]、③テイラールールなどによる金融政策の内生化[2]、等を行っている。（なお、硬直価格モデルとしては、Rotemberg 型を選択した。）

（1）家計

家計は消費財(Ct)と１期間の無リスク資産(Bt)を購入し、労働力(lt)の供給を行う。具体的には以下の効用関数（経済が均斉成長経路に収束するために必要なＣＲＲＡ型）を最大化する（無限期間（生涯）における効用の割引現在価値の最大化)。

$$\max\ E_t\sum_{s=0}^{\infty}\beta^{t+s}U(X_{t+s},l_{t+s}) = \max\ E_t\sum_{s=0}^{\infty}\beta^{t+s}\left(\frac{e_t^c X_{t+s}^{1-\sigma^c}}{1-\sigma^c}-A^l\frac{e_t^l l_{t+s}^{1+\eta^l}}{1+\eta^l}\right) \quad ①$$

$$X_t = C_t - \theta^c C_{t-1} \quad ②$$

$\beta\in(0,1)$ は主観的割引因子であり、$\sigma^c>0$ は相対的リスク回避度である。

η^l は労働供給弾性値の逆数、A^l は消費と労働の間の調整因子である。θ^c は消費の習慣形成の強度を示すパラメータである。

e_t^x、x∈{ c, l, i }は理論値からの乖離であり、その自然対数は以下の一次の自己回帰過程に従う。

$$\ln(e_t^x)=\rho^x\ln(e_{t-1}^x)+\varepsilon_t^x \quad ③$$

ε_t^x は毎期ランダムに生じる確率的ショック項である。ρ^x はショックの持続性に関するパラメータである。つまり、e_t^c、e_t^l は消費と労働の効用の乖離項を意味する。

代表的家計[3]の予算制約を以下のように考える。

$$C_t+I_t+\frac{B_t}{P_t}=\frac{W_t}{P_t}l_t+R_t^kK_{t-1}+\frac{R_{t-1}B_{t-1}}{P_t}+\int_0^1 J_{it}di-T_t \quad ④$$

[1] 企業が互いに差別化された財を生産しており、自らの利潤を最大化するように価格決定できる市場において、企業が何らかの要因により価格決定が制約されているとの仮定により、一般物価の変動を内生化したもの。価格決定の制約のかけ方には Calvo タイプや Rotemberg タイプなどがあるが、このように内生化したインフレ率は、現実にみられる物価変動の粘着性、つまり物価が急激には変化しないという性質を備えている。

[2] 物価や経済成長の安定化を目的として、マクロ経済の変動に応じて機械的に金融政策ツールとしての名目金利が決定されること。金融政策ルールは必ずしも機械的に決定される必要はなく、物価や経済成長の安定度を指標化し、その指標が最大化されるように金融政策がなされると仮定することもできるが（最適金融政策）、特に実証分析に用いるニューケインジアンモデルではテイラールールにより金融政策が決定されていると仮定することが多い。

[3] ここでは、経済には代表的家計と呼ばれる一つの家計が存在し、家計に関するあらゆる意思決定を行っているという仮定をおいている。

$$K_t = (1-\delta)K_{t-1} + e_t^i \left[1 - S\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right] I_t \qquad ⑤$$

$$S\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right) = \frac{1}{2}\left[\exp\left(\chi\left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right)\right) + \exp\left(-\chi\left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right)\right) - 2\right] \qquad ⑥$$

ここで、I_t は企業投資、K_t は資本、W_t は名目賃金、R_t^k は資本財の実質リターン、R_t は無リスク資産の名目リターン、J_{it} は企業利潤、T_t は一括税、δ は減価償却率、P_t は物価水準、e_t^i は投資の乖離項である。$S\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)$ はｔ期の投資量に対して逓増的に増加する費用関数であり、調整コストと呼ばれる（この調整コストが存在するために企業は瞬時に資本ストックを増加・減少させることができない）。χ は投資の調整コストのパラメータである。

家計は④の予算制約の下で効用関数①を最大化する以下のような条件付き最大化問題（ラグランジアン）を解く（λ_t 、q_t はラグランジュ乗数）。

$$L = \sum_{s=0}^{\infty} E_t \beta^{t+s} \left[\begin{array}{l} \left\{ \dfrac{e_t^c \left(C_{t+s} - \theta^c C_{t-1}\right)^{1-\sigma^c}}{1-\sigma^c} - A^l \dfrac{e_t^l l_{t+s}^{1+\eta^l}}{1+\eta^l} \right\} \\ + \lambda_{t+s} \left\{ \dfrac{W_{t+s}}{P_{t+s}} l_{t+s} + R_{t+s}^K K_{t+s-1} + \dfrac{R_{t+s-1} B_{t+s-1}}{P_{t+s}} + \int_0^1 J_{it+s} di - T_{t+s} - C_{t+s} - I_{t+s} - \dfrac{B_{t+s}}{P_{t+s}} \right\} \\ + q_{t+s} \left\{ (1-\delta) K_{t+s-1} + e_t^i \left(1 - S\left(\dfrac{I_{t+s}}{I_{t+s-1}}\right)\right) I_{t+s} - K_{t+s} \right\} \end{array} \right]$$

・・・⑦

消費、労働供給、投資、資本ストック、無リスク資産についての一階の条件はそれぞれ以下のとおりである。

$$\partial C_t : \frac{1}{e_t^c \left(C_t - \theta^c C_{t-1}\right)^{\sigma^c}} - \lambda_t = 0 \qquad ⑧$$

$$\partial l_t : \lambda_t \frac{W_t}{P_t} - A^l e_t^l l_t^{\eta^l} = 0 \qquad ⑨$$

$$\partial I_t : \beta E_t\left[e^i_{t+1}q_{t+1}S'\left(\frac{I_{t+1}}{I_t}\right)\left(\frac{I_{t+1}}{I_t}\right)^2\right]+e^i_t q_t\left[1-S\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)-S'\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right]-\lambda_t=0 \qquad ⑩$$

$$\partial K_t : \beta E_t\left[R^k_{t+1}\lambda_{t+1}\right]+\beta(1-\delta)E_t\left[q_{t+1}\right]-q_t=0 \qquad ⑪$$

$$\partial B_t : \beta R_t E_t\left[\frac{\lambda_{t+1}}{\pi_{t+1}}\right]-\lambda_t=0 \qquad ⑫$$

また、以下の確率的割引因子を定義する。

$$D_{t,t+s}=\beta^s\frac{E_t\left[\lambda_{t+s}\right]}{\lambda_t} \qquad ⑬$$

（２）企業

企業部門には最終財生産企業と中間財生産企業の２種類が存在する。最終財生産企業は中間財生産企業から中間財を購入して最終財を生産する。具体的には以下のような生産関数（CES 型生産関数）の下で生産を行う。

$$Y_t=\left\{\int_0^1 Y_{it}^{\frac{\eta-1}{\eta}}di\right\}^{\frac{\eta}{\eta-1}} \qquad ⑭$$

最終財生産企業はこの生産関数を制約条件として以下の利潤最大化問題を解く。

$$\max_{Y_{it}} \quad P_t Y_t-\int_0^1 P_{it}Y_{it}di \qquad ⑮$$

$$\text{s.t} \quad Y_t=\left\{\int_0^1 Y_{it}^{\frac{\eta-1}{\eta}}di\right\}^{\frac{\eta}{\eta-1}} \qquad ⑯$$

⑯を⑮に代入して、

$$\max_{Y_{it}} P_t\left\{\int_0^1 Y_{it}^{\frac{\eta-1}{\eta}}di\right\}^{\frac{\eta}{\eta-1}}-\int_0^1 P_{it}Y_{it}di$$

中間財 Y_{it} に対する一階の条件を求めることで、中間財需要関数を得る。

$$\partial Y_{it}:\ P_t\left\{\int_0^1 y_{it}^{\frac{\eta-1}{\eta}}di\right\}^{\frac{1}{\eta-1}}Y_{it}^{-\frac{1}{\eta}}=P_{it}$$

ここで、$\left\{\int_0^1 Y_{it}^{\frac{\eta-1}{\eta}}di\right\}^{\frac{1}{\eta-1}}=Y_t^{\frac{1}{\eta}}$ であるから、

$$P_t Y_t^{\frac{1}{\eta}} Y_{it}^{-\frac{1}{\eta}} = P_{it}$$

$$Y_{it} = \left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)^{-\eta} Y_t \qquad ⑰ \quad （中間財需要関数）$$

ここで得られた中間財需要関数を最終財生産関数⑭に代入して以下を得る。

$$P_t = \left[\int_0^1 P_{it}^{1-\eta} di\right]^{\frac{1}{1-\eta}} \qquad ⑱$$

最終財市場は完全競争であると仮定する。したがって、家計の予算制約には最終財企業の利潤は現れない。家計の予算制約にある企業利潤（$\int_0^1 J_{it} di$）は中間財企業のものである。

一方、中間財市場は独占的競争[4]が仮定されており、中間財の種類ごとに超過利潤が発生している。中間財企業の生産関数（コブ＝ダグラス型生産関数）は以下のとおりである。

$$Y_{it} = z_t K_{it-1}^{\alpha} l_{it}^{1-\alpha} - \overline{\Psi} \qquad ⑲$$

$$\ln(z_t) = \rho^z \ln(z_{t-1}) + \varepsilon_t^z \qquad ⑳$$

Y_{it} は中間財、z_t は技術水準、ε_t^z は技術ショック（生産性ショック）、αは資本分配率、$\overline{\Psi}$ は固定費用である。中間財市場は独占的競争なので、中間財生産企業は中間財価格 P_{it} を調整することで利潤最大化を行う。

独占的競争の仮定に加えて、中間財生産企業は Rotemberg[1982]の逓増型の価格調整費用に直面していると仮定する。具体的には以下のとおり。

$$\frac{\xi}{2}\left(\frac{P_{it}}{P_{it-1}} - 1\right)^2 Y_t \qquad ㉑$$

ξは価格硬直性の程度であり、Rotemberg パラメータと呼ばれる。ξ＝0ならば、名目硬直性は存在せず価格は完全伸縮的である。Rotemberg パラメータが大きくなると価格調整はより緩やかに行われる。ξ＞0の場合、価格は粘着的（Sticky price）である。

中間財企業は以下の無限期間における期待利潤の割引現在価値を最大化する。

4 差別化された財を独占的に生産する企業が多数存在し、自社が生産する財に対してはそれぞれ価格支配力をもつ一方で、（互いに代替材である）他の財を生産する企業と競争するような市場環境。

$$J_{it} = E_t \sum_{s=0}^{\infty} D_{t,t+s} \left[\frac{P_{it+s}}{P_{t+s}} Y_{it+s} - \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} l_{it+s} - R_{t+s}^k K_{it-1+s} - \frac{\xi}{2} \left(\frac{P_{it+s}}{P_{it-1+s}} - 1 \right)^2 Y_{t+s} \right] \quad ㉒$$

すなわち、実質の売上$\left[\frac{P_{it+s}}{P_{t+s}} Y_{it+s} \right]$から要素費用$\left[\frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} l_{it+s} + R_{t+s}^k K_{it-1+s} \right]$と価格調整費用$\left[\frac{\xi}{2} \left(\frac{P_{it+s}}{P_{it-1+s}} - 1 \right)^2 Y_{t+s} \right]$を差し引いたものが当期の利潤であり、それを割引因子$D_{t,t+s}$で割り引いた現在価値が利潤となる。

中間財生産企業は、労働量l_{it}、資本K_{it-1}（家計からレンタルする）を任意に変更できるだけでなく、差別的な財を生産する独占的競争下にあるため、毎期の中間財価格P_{it}も自由に決定できる。価格に応じて需要量も変化するが、それを表す中間財需要関数⑰式を代入し、制約条件である生産関数⑲式のラグランジュ乗数をφ_tとすると、ラグランジアンは以下のように定義できる。

$$L = E_t \sum_{s=0}^{\infty} D_{t,t+s} \left[\begin{array}{l} \frac{P_{it+s}}{P_{t+s}} \left(\frac{P_{it+s}}{P_{t+s}} \right)^{-\eta} Y_{t+s} - \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} l_{it+s} - R_{t+s}^k K_{it-1+s} - \frac{\xi}{2} \left(\frac{P_{it+s}}{P_{it-1+s}} - 1 \right)^2 Y_{t+s} \\ + \varphi_{t+s} \left(z_t K_{it-1+s}^{\alpha} l_{it+s}^{1-\alpha} - \overline{\Psi} - \left(\frac{P_{it+s}}{P_{t+s}} \right)^{-\eta} Y_{t+s} \right) \end{array} \right]$$

・・・㉓

中間財価格、労働投入量、資本投入量に対する一階の条件は以下のとおりである。

$$\partial P_{it} : \xi E_t \left[D_{t,t+1} \pi_{t+1} (\pi_{t+1} - 1) Y_{t+1} \right] - \xi \pi_t (\pi_t - 1) Y_t + (\eta \varphi_t - \eta + 1) Y_t = 0 \quad ㉔$$

$$\partial l_{it} : (1-\alpha) \varphi_t z_t \left(\frac{l_t}{K_{t-1}} \right)^{-\alpha} - \frac{W_t}{P_t} = 0 \quad ㉕$$

$$\partial K_{it-1} : \alpha \varphi_t z_t \left(\frac{l_t}{K_{t-1}} \right)^{1-\alpha} - R_l^k = 0 \quad ㉖$$

ただし、ここではすべての中間財生産企業は同一の行動をとるので、同質性条件$\mathrm{P}_{it} = P_t$、$l_{it} = l_t$、$K_{it} = K_t$を用いている。また、$\pi_{\mathrm{t}} = P_t / P_{t-1}$である。

（3）政府・中央銀行

政府は以下の財政支出ルールに基づいて財政政策を行うと仮定する。

$$\ln\left(\frac{G_t}{g^y\bar{Y}}\right)=\rho^g\ln\left(\frac{G_{t-1}}{g^y\bar{Y}}\right)+\varepsilon_t^g \qquad ㉗$$

ここで、g^y は名目 GDP に対する政府支出比率であり、ρ^gは財政政策ルールパラメータ、ε_t^gは政府支出ショックである。

また、中央銀行はテイラールールに基づいて名目金利を設定すると仮定する。

$$\ln\left(\frac{R_t}{\bar{R}}\right)=\rho^r\ln\left(\frac{R_{t-1}}{\bar{R}}\right)+\left(1-\rho^r\right)\left[\rho_\pi\ln\left(\frac{\pi_t}{\bar{\pi}}\right)+\rho_y\ln\left(\frac{Y_t}{\bar{Y}}\right)\right]+\varepsilon_t^r \qquad ㉘$$

ρ^r は金利スムージングパラメータ、ρ_π と ρ_y はインフレーションと GDP の定常状態からの乖離に関する反応係数、ε_t^rは金融政策ショックである。

（4）財市場の均衡

財市場の均衡式は以下のように与えられる。

$$Y_t=C_t+I_t+G_t+\frac{\xi}{2}\left(\pi_t-1\right)^2Y_t \qquad ㉙$$

右辺最後の項は㉑の調整コストである。

以上、マクロモデルとしては、⑤、⑧、⑨、⑩、⑪、⑫、⑬、⑲、⑳、㉔、㉕、㉖、㉗、㉘、㉙と e_t^c、e_t^l、e_t^i の遷移式で、合計１８本である。

変数一覧

変数	定義
C_t	消費
l_t	労働
I_t	設備投資

(B_t)	(無リスク資産)
G_t	政府支出
Y_t	ＧＤＰまたは財の生産量
K_t	資本
P_t	価格水準
W_t	賃金
π_t	インフレ率
R_t	金利
$D_{t,t+1}$	確率的割引因子
λ_t	ラグランジュ乗数（消費）
q_t	ラグランジュ乗数（資本）
φ_{t}	ラグランジュ乗数（生産）
z_t	技術水準
e_t^c	消費の効用の乖離項
e_t^l	労働の効用の乖離項
e_t^i	投資の乖離項

外生ショック一覧

外生ショック	定義

ε_t^z	技術ショック
ε_t^g	政府支出ショック
ε_t^r	金融政策ショック
ε_t^c	消費選好ショック
ε_t^l	労働供給ショック
ε_t^i	投資ショック

3 おわりに

以上、ＤＳＧＥニューケインジアンモデルの標準形の定式化の概要を明らかにした。上記のようなモデルを元に、今後は、このモデルをさらに現実経済に近づけるため、①異時点間の消費の最適化を行わない家計が一部存在するケース、②生産関数に社会資本を導入するケース、③名目金利が常にゼロ近傍であるケース、等のいくつかのオプションを加えていくこととする。また、実際の分析においては、各式の対数線形近似を求めたり、パラメータを推定する作業が必要になる。最終形としては、公共投資のマクロ経済効果が分析できるようにする予定である。

（参考文献）

Blanchard, O. J., & Kiyotaki, N. (1987). Monopolistic competition and the effects of aggregate demand. *The American Economic Review*, 647-666.

Cantore, C., Levine, P., Melina, G., & Yang, B. (2012). A fiscal stimulus with deep habits and optimal monetary policy. *Economics Letters*, *117*(1), 348-353.

Christiano, L. J., Eichenbaum, M., & Evans, C. L. (2005). Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy. *Journal of political Economy*, *113*(1), 1-45.

Christiano, L. J., Trabandt, M., & Walentin, K. (2011). DSGE Models for Monetary Policy Analysis. *Handbook of Monetary Economics*, Vol.3, Elsevier, Chap. 7 285-367

Erceg, C. J., Henderson, D. W., & Levin, A. T. (2000). Optimal monetary policy with staggered wage and price contracts. *Journal of monetary Economics*, *46*(2), 281-313.

Kydland, F. E., & Prescott, E. C. (1982). Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1345-1370.

Lucas, R. E. (1976, January). Econometric policy evaluation: A critique. In *Carnegie-Rochester conference series on public policy* (Vol. 1, 19-46). North-Holland.

Romer, D.（2011）Advanced Macroeconomics (4th ed.), McGraw-Hill/Irwin.

Rotemberg, J. J. (1982). Sticky prices in the United States. *Journal of Political Economy*, *90*(6), 1187-1211.

江口　允崇（2011）　動学的一般均衡モデルによる財政政策の分析　三菱経済研究所

福田慎・溜川健一（2013）動学的確率的一般均衡モデルの動向: モデル構築を中心に.　商学論集第８１巻第３号　43-60

二神孝一・堀　敬一（2017）　マクロ経済学　第２版　有斐閣